Filière Sciences Mathématiques et Informatique
Filière Sciences de la Matière Physique

Mécanique du Solide

Année 2008

Mohammed Loulidi

Laboratoire de Magnétisme
et
Physique des Hautes Energies

Département de Physique
Faculté des Sciences
Université Mohammed V-Agdal

loulidi@fsr.ac.ma

Table des matières

Chap I : Compléments mathématiques

Chap II : Cinématique des solides

Chap III : Cinétique des Solides

Chap IV: Principe fondamental de la dynamique
Théorèmes généraux

Chap V : Travail, puissance : Théorème de l'énergie cinétique

ChapI
Compléments Mathématiques

I- Espace vectoriel et champ de vecteurs

1- Espace vectoriel

1-1 Définition

On appelle espace vectoriel ***E*** sur un corps ***K***, un ensemble d'éléments, appelés vecteurs, qui satisfait aux propriétés suivantes :

1- ***E*** est muni d'une structure de groupe commutatif pour une loi de composition interne, l'addition vectorielle notée +
2- Si λ et $\mu \in$ ***K***, on a $\forall$ U et $V \in$ ***E*** :

$$\lambda(U+V) = \lambda U+\lambda V \qquad (\lambda+\mu)U=\lambda U+\mu U$$

$$\lambda(\mu U)=(\lambda\mu)U \qquad \mathbf{1}.U=U$$

1-2 Espace vectoriel Euclidien

Un espace vectoriel ***E*** est euclidien s'il est muni d'un produit scalaire f qui à deux vecteurs U et V de ***E*** fait correspondre le nombre réel $f(U,V)$:

$$f(U,V) = f(V,U) \qquad f(U,\lambda V) = \lambda f(U,V)$$

$$f(U,V+W) = f(U,V) + f(U,W)$$

$$f(U,U) > 0 \text{ si } U \neq 0 \text{ et } f(U,U) = 0 \text{ si } U = 0$$

$f(U,U)$ est le carré de la norme de U noté $//U//$.

1-3 base d'un espace vectoriel

On appelle base d'un espace vectoriel un ensemble de n vecteurs $\{e_i\}$de ***E***, indépendants qui permettent de décomposer linéairement tout vecteur de E :

$$U=\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$$

Les coefficients x_i sont les composantes de U dans la base considérée. La base est dite orthonormée si $\forall\, i\,,\, j \quad e_i \,.e_j = \delta_{ij}$.

2- Espace affine

2-1 Définition

On appelle espace affine $\mathcal{E}$ un ensemble d'éléments, appelés points tel qu'à tout couple ordonné (A,B) de deux points A et B, on puisse associer un vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'un espace vectoriel ***E***. Si A, B et C désignent trois points de $\mathcal{E}$ on doit avoir :

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Si O est un point de $\mathcal{E}$ et $\vec{V} \in$ ***E***, $\exists$ un point unique A de $\mathcal{E}$ défini par $\overrightarrow{OA} = \vec{V}$

2-2 Espace métrique

Un espace métrique est un espace affine $\mathcal{E}$ auquel on a associé un espace vectoriel euclidien **E**. La distance entre deux points A et A' de $\mathcal{E}$ n'est autre que la norme du vecteur $\overrightarrow{AA'}$:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)\vec{e}_i$$

$$//\overrightarrow{AA'}//^2 = \sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^2$$

Dans l'espace affine physique à 3 dimensions, si les points sont infiniment voisins la norme est donnée par : $//\overrightarrow{AA'}//^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

3- Opérations sur les vecteurs

3-1 Produit scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{U} .= \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i$ et $\vec{V} .= \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$ est défini par :

$$\vec{U}.\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = //\vec{U}//\ //\vec{V}// \cos(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$$

3-2 Produit vectoriel

Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$ noté : $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ et de norme $//\vec{W}// = //\vec{U}//\ //\vec{V}// \sin(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$. Ces composantes dans la base $\{\vec{e}_i\}$ sont données par : $w_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u_j v_k$ avec

$\varepsilon_{ijk} = 0$ si au moins deux indices sont égaux et $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik} = 1$ dans une permutation circulaire directe. Dans le cas d'un espace vectoriel à 3 dimensions ils s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_3 \end{array} \right.$$

$\vec{W}$ est un vecteur axial qui dépend de l'orientation de la base.

3-3 Produit mixte

$$(\vec{U} \wedge \vec{V}).\vec{W} = (\vec{W} \wedge \vec{U}).\vec{V} = (\vec{V} \wedge \vec{W}).\vec{U}$$

Il est invariant dans une rotation directe.

3-4 Double produit vectoriel

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U}.\vec{W}).\vec{V} - (\vec{U}.\vec{V}).\vec{W}$$

C'est un vecteur contenu dans le plan formé par $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

3-5 Division vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ non nuls. On se propose de déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{X}$ solution de l'équation : $\vec{U} \wedge \vec{X} = \vec{V}$

$\vec{X}$ est le résultat de la division vectorielle.

La solution de la division vectorielle n'est possible que si $\vec{U}$ est perpendiculaire à $\vec{V}$ puisque $\vec{U}.\vec{V} = \vec{U}.(\vec{U} \wedge \vec{X}) = \vec{X}.(\vec{U} \wedge \vec{U}) = 0$. En conséquence les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{X}$ sont contenus dans le plan π perpendiculaire à $\vec{V}$.

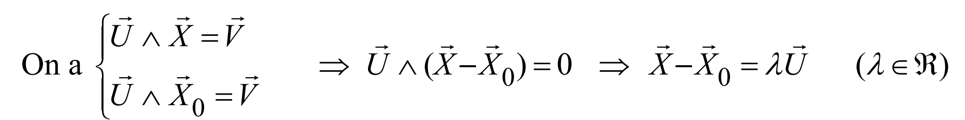
Soit $\vec{X}_0$ une solution particulière : $\vec{U}.\vec{X}_0 = 0$

$\vec{U} \wedge \vec{X}_0 = \vec{V}$

$\vec{U} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{X}_0) = \vec{U} \wedge \vec{V}$

$(\vec{U}.\vec{X}_0)\vec{U} - \vec{U}^2 \vec{X} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

$$\vec{X}_0 = \frac{\vec{V} \wedge \vec{U}}{\vec{U}^2}$$



On a $\begin{cases} \vec{U} \wedge \vec{X} = \vec{V} \\ \vec{U} \wedge \vec{X}_0 = \vec{V} \end{cases} \Rightarrow \vec{U} \wedge (\vec{X} - \vec{X}_0) = 0 \Rightarrow \vec{X} - \vec{X}_0 = \lambda \vec{U} \quad (\lambda \in \Re)$

La solution générale s'écrit alors :

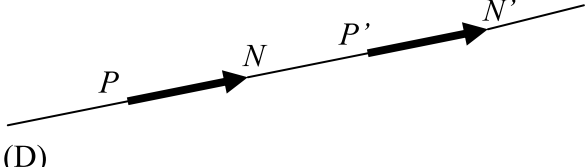
$$\vec{X} = \frac{\vec{V} \wedge \vec{U}}{\vec{U}^2} + \lambda \vec{U} \quad (\lambda \in \Re)$$

4- Champ de vecteurs

4-1 Vecteur lié et système de vecteurs liés : Glisseurs

Soit (P,N) un bipoint de l'espace affine $\mathcal{E}$. La relation d'équipollence $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{P'N'}$ est une relation d'équivalence qui défini un vecteur $\vec{V}$ de l'espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ associé à $\mathcal{E}$.

Considérons la relation d'équivalence $\Re$ définie sur l'ensemble des bipoints par :



$(P, N) \, \Re \, (P', N') \Leftrightarrow \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{P'N'}$ et P, N, P', N' sont alignés.

4-1-1 Définition

On appelle vecteur lié (glisseur) toute classe d'équivalence selon la relation $\Re$. Le glisseur dont $\overrightarrow{PN}$ est un représentant est donc défini par :

- un vecteur $\vec{V}$ de $\boldsymbol{E}$.
- un point quelconque P de son support D.

Le glisseur est noté $(P, \vec{V})$.

4-1-2 Moment en un point d'un vecteur lié

Le moment en un point A d'un vecteur lié (P, $\vec{V}$) est un vecteur défini par :

$$\vec{M}_A(\vec{V}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}$$

Propriétés

- Le moment au point A d'un vecteur lié (P, $\vec{V}$) est indépendant du point choisi, P, sur son support (D). En effet : soit Q un point appartenant au support (D) on a :

$\vec{M}_A(\vec{V}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V} = (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}) \wedge \vec{V} = \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{V}$ (vue que $\overrightarrow{QP} \,//\, \vec{V}$)

Il en résulte que le nouveau système de vecteurs liés est obtenu en faisant glisser le vecteur $\vec{V}$ sur son support d'où la notion de glisseur.

- Relation entre les moments de deux points différents

Soient A et B deux points de l'espace affine $\mathcal{E}$,

$\vec{M}_A(\vec{V}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}$

d'où la relation

$$\vec{M}_A(\vec{V}) = \vec{M}_B(\vec{V}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}$$

4-1-3 Moment d'un vecteur lié par rapport à un axe

Le moment d'un vecteur lié (P, $\vec{V}$) par rapport à un axe Δ passant par A de vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$ est le produit scalaire

$$M_\Delta(\vec{V}) = \vec{e}_\Delta \,.\, \vec{M}_A(\vec{V})$$

M_Δ est indépendant du point choisi sur Δ. Soient A et B deux points de Δ, le moment par rapport à Δ est :

$M_\Delta = \vec{e}_\Delta . \vec{M}_A(\vec{V}) = \vec{e}_\Delta . \vec{M}_B(\vec{V}) + \vec{e}_\Delta . (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}) = \vec{e}_\Delta . \vec{M}_B(\vec{V})$

4-2 Système de vecteurs liés : ensemble de glisseurs

4-2-1 Ensemble fini de vecteurs liés

Soit un ensemble fini de glisseurs $(P_i\,, \vec{V}_i\,)$ (i = 1,2,…n). On appelle

- résultante de l'ensemble fini de glisseurs la quantité : $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i$
- moment résultant au point A de l'ensemble des glisseurs : $\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP}_i \wedge \vec{V}_i$

Propriété :

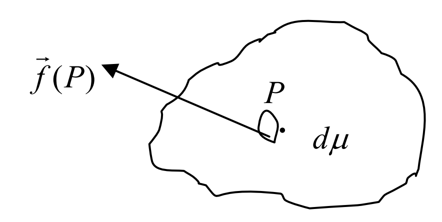
$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP}_i \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BP}_i \wedge \vec{V}_i$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}$$

4-2-2 Ensemble infini de glisseurs

Soit $\vec{f}(P)$ un vecteur défini en tout point P d'un domaine $\boldsymbol{E}$ (champ de vecteurs), relativement à la mesure $d\mu$.. On associe à l'ensemble infini de glisseurs $(P, \vec{f}(P))$

- la résultante $\vec{R} = \int_{P\in E} \vec{f}(P)\, d\mu$
- le moment au point A ; $\vec{M}_A = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}(P)\, d\mu$



En pratique $\vec{f}(P)$ peut désigner une densité de force linéique, surfacique ou volumique. Elle peut aussi représenter un champ de vecteurs de vitesse ou d'accélération. $d\mu$ est une mesure soit de longueur, de surface ou de volume ou bien une mesure de masse.

Propriété

$$\vec{M}_A = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}(P)\, d\mu = \int_{P\in E} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{f}(P)\, d\mu + \int_{P\in E} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{f}(P)\, d\mu = \overrightarrow{AB} \wedge \int_{P\in E} \vec{f}(P)\, d\mu + \int_{P\in E} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{f}(P)\, d\mu$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}$$

4-3 Champ de vecteurs antisymétrique

4-3-1 Champ de vecteurs

On appelle champ de vecteurs ou champ vectoriel toute application qui fait correspondre à tout point A de l'espace affine $\mathcal{E}$, un vecteur $\vec{V}$ d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ de même dimension que $\mathcal{E}$.

Exemple : Champ de vitesse, champ d'accélération, champ de force, champ électrique, champ magnétique,…etc.

4-3-2 Champ antisymétrique

Définitions :

i) Un champ vectoriel $\vec{V}(A)$ est antisymétrique s'il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que : $\forall$ A et B de l'espace affine $\mathcal{E}$ on a :

$$\vec{V}(A) = \vec{V}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}$$

On appèle $\vec{R}$ le vecteur du champ antisymétrique.

ii) Un champ vectoriel $\vec{V}(A)$ est antisymétrique s'il existe une application linéaire £ antisymétrique définie de $\boldsymbol{E}$ sur $\boldsymbol{E}$:

$$\vec{V}(A) - \vec{V}(B) = £\,(\overrightarrow{BA}).$$

On rappèle qu'une application linéaire est antisymétrique si $\vec{u}.£(\vec{v}) = -\vec{v}.£(\vec{u})$. Ses éléments sont donnés par $L_{uv} = \vec{u}.£(\vec{v})$. L'opérateur £ peut être représenté par $£ = \vec{R} \wedge$.

Etant une application linéaire, £ peut être représentée par une matrice antisymétrique qui s'écrit dans la base $\{\vec{e}_i\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & 0 & L_{23} \\ -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $L_{12} = -R_3$, $L_{13} = R_2$, $L_{23} = -R_1$, on montre que $£(\vec{e}_i) = \overrightarrow{R} \wedge \vec{e}_i$. En effet, nous avons

$-\varepsilon_{ijk} R_k = L_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \vec{e}_k . \vec{R} = -\varepsilon_{ijk} (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j). \vec{R} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i .(\vec{R} \wedge \vec{e}_j) = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i £(\vec{e}_j)$.

On dit que £ est dual au 3-vecteur $\overrightarrow{R}$. La connaisance de £ permet sa détermination explicite :

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \wedge £(\vec{e}_i) = \sum_i \vec{e}_i \wedge (\vec{R} \wedge \vec{e}_i) = \sum_i [(\vec{e}_i . \vec{e}_i)\vec{R} - (\vec{R}.\vec{e}_i)\vec{e}_i] = 2\vec{R}$$

Ce qui donne

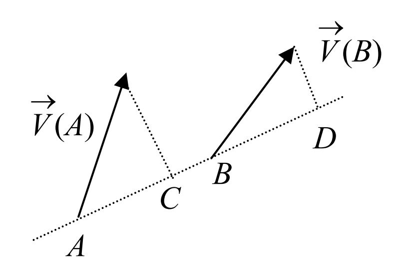
$$\vec{R} = \frac{1}{2} \sum_i \vec{e}_i \wedge £(\vec{e}_i)$$

4-3-3 Equiprojectivité

Un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ est équiprojectif si et seulement si $\forall$ A et B de l'espace affine $\mathcal{E}$ on a :

$$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{V}(A) = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{V}(B)$$

$AC = BD$



Proposition

Tout champ antisymétrique est équiprojectif et réciproquement tout champ équiprojectif est antisymétrique.

Considérons un champ antisymétrique $\overrightarrow{V}$: $\overrightarrow{V}(A) = \overrightarrow{V}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R}$

On a $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{V}(A) = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{V}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R}) = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{V}(B)$.

Réciproquement si $\overrightarrow{V}$ est un champ équiprojectif : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{V}(A) = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{V}(B)$

On a : $\overrightarrow{AB} . (\overrightarrow{V}(A) - \overrightarrow{V}(B)) = 0$

$(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).\overrightarrow{V}(A) = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).\overrightarrow{V}(B)$

$(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{V}(A) - \overrightarrow{V}(O)) = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{V}(B) - \overrightarrow{V}(O))$

$\overrightarrow{V}$ étant équiprojectif, alors $\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{V}(A) - \overrightarrow{V}(O)) = 0$ et $\overrightarrow{OB}.(\overrightarrow{V}(B) - \overrightarrow{V}(O)) = 0$

ce qui donne $\overrightarrow{OB} . \overrightarrow{W}(A) = -\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{W}(B)$ avec $\overrightarrow{W}(A) = \overrightarrow{V}(A) - \overrightarrow{V}(O)$.

En déduit que $\vec{OA}.\vec{W}(A) = -\vec{OA}.\vec{W}(A) = 0 \Rightarrow \vec{OA} \perp \vec{W}(A)$ et on peut écrire $\vec{W}(A) = \vec{R} \wedge \vec{OA}$

Où $\vec{R}$ est vecteur fixé. Il en résulte que : $\vec{V}(A) = \vec{V}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OA}$

II- Torseurs

Le torseur est un outil mathématique privilégié de la mécanique. Il lui permet une représentation condensée et simplifiée. Il sert à représenter le mouvement d'un solide, à caractériser une action mécanique(force) à formuler le principe fondamental de la dynamique(PDF) et à écrire la puissance d'une force extérieure appliquée à un solide.

1- Définition

On appelle un torseur τ, l'ensemble d'un champ antisymétrique $\vec{M}$ et de son vecteur $\vec{R}$. On le note $\tau = [\vec{R}, \vec{M}]$. $\vec{M}$ et $\vec{R}$ sont les éléments de réduction du torseur τ, le premier est son moment alors que le deuxième est sa résultante(son vecteur). Il s'écrit en un point P de l'espace affine $\mathcal{E}$: $\tau = [\vec{R}, \vec{M}(P)]$.

En général la connaissance de $\vec{R}$ et de $\vec{M}$ en un point particulier A de l'espace affine $\mathcal{E}$ détermine complètement le torseur en tout point P de l'espace $\mathcal{E}$:

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AP}$$

Remarque

Cette définition dépasse le cadre initial fixé par les théorèmes généraux, puisque, même en l'absence de système de vecteurs liés, on peut associer un torseur τ à un champ antisymétrique. Par exemple le torseur cinématique τ_v n'est pas construit à partir d'un ensemble de vecteurs liés, mais à partir d'un champ antisymétrique de vitesse :

$$\vec{V}(A) = \vec{V}(B) + \vec{AB} \wedge \vec{\omega}$$

pour lequel le vecteur rotation $\vec{\omega}$ n'est pas un vecteur lié.

Exemples de torseurs

i) Torseur cinématique : c'est le torseur vitesse d'un solide **S** en mouvement dans $\mathcal{E}$ $\tau_V(\text{S/A}) = [\vec{\omega}(S/A), \vec{V}(S/A)]$.

ii) Torseur cinétique de **S** dans $\mathcal{E}$: $\tau_C(\text{S/A}) = [\vec{P}(S/A), \vec{\sigma}(S/A)]$. $\vec{\sigma}$ est appelé moment cinétique du système **S**.

iii) Torseur force : torseur des actions agissantes sur **S** dans $\mathcal{E}$ $\tau_F(\text{S/A}) = [\vec{F}(S/A), \vec{M}(S/A)]$. $\vec{M}$ est le moment de la force $\vec{F}$ au point A.

2- Propriétés des torseurs

2-1 <u>Egalité de deux torseurs</u>

Deux torseurs sont égaux si et seulement si leurs éléments de réduction sont égaux en tout point P de l'espace affine $\mathcal{E}$.

$$\tau_1 = \tau_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \forall P \in A; \vec{M}_1(P) = \vec{M}_2(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \exists Q \in A : \vec{M}_1(Q) = \vec{M}_2(Q) \end{cases}$$

2-2 Somme de deux torseurs

La somme de deux torseurs τ_1 et τ_2 est un torseur τ :

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = [\vec{R}_1, \vec{M}_1] + [\vec{R}_2, \vec{M}_2] = [\vec{R}_1 + \vec{R}_2, \vec{M}_1 + \vec{M}_2]$$

2-3 Multiplication par un scalaire

Si τ est un torseur $\tau' = \lambda\tau = [\lambda\vec{R}, \lambda\vec{M}]$ est aussi un torseur.

2-4 Torseur nul

Un torseur nul est un torseur dont les éléments de réduction sont nuls :

$\tau = 0 \Leftrightarrow \vec{R} = 0$ et $\vec{M} = 0$ en tout point P de l'espace $\mathcal{E}$.

En conclusion l'ensemble des torseurs est un espace vectoriel de dimension 6(3 composantes de $\vec{R}$ et 3 composante de $\vec{M}$).

2-5 Dérivée d'un torseur

Soit une famille de torseurs τ_t dépendants du temps t. les éléments de réduction de τ_t au point P s'écrivent : $\tau_t = [\vec{R}_t, \vec{M}_t(P)]$. La dérivée de τ_t est définie par :

$$\frac{d\tau_t}{dt} = [\frac{d\vec{R}_t}{dt}, \frac{\mathrm{d}\vec{M}_t(P)}{\mathrm{dt}}]$$

2-6 Invariants d'un torseur

D'après la définition d'un torseur on peut lui associer deux invariants scalaires et un invariant vectoriel :

i) Invariants scalaires : $\forall$ P et Q de l'espace $\mathcal{E}$ on a :

$$\vec{R}.\vec{M}(P) = \vec{R}.\vec{M}(Q) = \mu = cst$$

$$\vec{PQ}.\vec{M}(P) = \vec{PQ}.\vec{M}(Q) = cst$$

ii) Invariant vectoriel

Il est défini par : $\vec{I}(P) = \frac{\mu}{\|\vec{R}\|^2}\vec{R} = \vec{cst}$

2-7 Axe d'un torseur

2-7-1 Définition

L'axe centrale Δ d'un torseur $\tau = [\vec{R}, \vec{M}]$ est l'ensemble des points P tel que $\vec{M}(P)$ est colinéaire à $\vec{R}$: $\Delta = \{P / \vec{R} \wedge \vec{M}(P) = 0\}$

2-7-2 Equation de l'axe

Considérons un torseur τ défini en un point A : $\tau = [\vec{R}, \vec{M}(A)]$ avec $\vec{R} \neq 0$. On décompose $\vec{M}(A)$ suivant : $\vec{M}(A) = \vec{M}_{//} + \vec{M}_{\perp}$ tel que $\begin{cases} \vec{M}_{//} \wedge \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_{\perp} . \vec{R} = 0 \end{cases}$

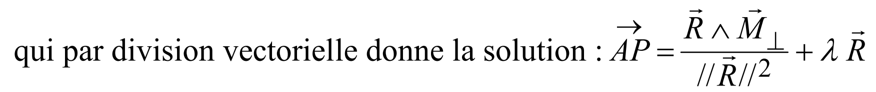
Si P est un point qui appartient à Δ on a :

$\vec{R} . \vec{M}(A) = \vec{R} . \vec{M}(P) \Rightarrow \vec{M}(P) = \vec{M}_{//}$

On a alors

$\vec{M}_{//} = \vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AP} = \vec{M}_{//} + \vec{M}_{\perp} + \vec{R} \wedge \vec{AP}$

On obtient l'équation $\vec{M}_{\perp} = \vec{AP} \wedge \vec{R}$



qui par division vectorielle donne la solution : $\vec{AP} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{M}_{\perp}}{//\vec{R}//^2} + \lambda \vec{R}$

$$\vec{AP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(A)}{//\vec{R}//^2} + \lambda \vec{R}$$

Si on pose $\vec{AH} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{M}(A)}{//\vec{R}//^2}$, $\vec{AP} = \vec{AH} + \lambda \vec{R}$. H étant un point qui appartient à l'axe Δ tel que : $\vec{AH} \perp$ au plan formé par $\vec{R}$ et $\vec{M}(A)$. Donc l'axe central Δ est une droite de même direction que $\vec{R}$ et qui passe par le point H.

Remarques :

i) Si $P \in \Delta$, $\vec{M}(P) = \dfrac{\mu}{//\vec{R}//^2} \vec{R} = \vec{I}$ c'est l'invariant vectoriel du torseur.

En effet : $\vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \dfrac{\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{M}(A))}{//\vec{R}//^2} = \vec{M}(A) + \dfrac{\vec{R} . \vec{M}(A))}{//\vec{R}//^2} . \vec{R} - \dfrac{\vec{R} . \vec{R}}{//\vec{R}//^2} . \vec{M}(A)$

D'où le résultat.

ii) Le moment du torseur est le même en tout point de l'axe du torseur Δ : $\vec{R} . \vec{M}(H) = \vec{R} . \vec{M}(P)$, or $\vec{M}(H)$, $\vec{M}(P)$ et $\vec{R}$ sont colinéaires donc $M(H) = M(P)$.

iii) La norme du moment d'un torseur en tout point de l'axe Δ est minimale. En effet, soient $P \in \Delta$ et $A \notin \Delta$

$\vec{R} . \vec{M}(A) = \vec{R} . \vec{M}(P)$

$//\vec{R}// \, //\vec{M}(A)// \cos\theta = //\vec{R}// \, //\vec{M}(P)// \Rightarrow //\vec{M}(P)// = //\vec{M}(A)// \cos\theta \leq //\vec{M}(A)//$

2-8 Comoment de deux torseurs

Soient τ_1 et τ_2 deux torseurs dont les éléments de réduction au point P de $\mathcal{E}$:

$\tau_1 = [\vec{R}_1, \vec{M}_1(P)]$, $\tau_2 = [\vec{R}_2, \vec{M}_2(P)]$

Le comoment de τ_1 et τ_2 noté (τ_1, τ_2) est défini par le scalaire:

$$\varphi(P) = \vec{R}_1 . \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 . \vec{M}_1(P)$$

Ce produit est indépendant du point P, c'est un invariant scalaire.
En effet : soient P et Q deux points de l'espace affine $\mathcal{E}$.

$$\varphi(P) = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_1(P) = \vec{R}_1 \cdot (\vec{M}_2(Q) + \vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{QP}) + \vec{R}_2 \cdot (\vec{M}_1(Q) + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{QP})$$

or $\vec{R}_1 \cdot (\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{QP}) = -\vec{R}_2 \cdot (\vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{QP})$ d'où $\varphi(P) = \varphi(Q)$.

Exemples

1- Energie cinétique T(S/ $\mathcal{E}$) : $2\,T(S/A) = (\tau_v, \tau_c) = \vec{v}.\vec{p} + \vec{\sigma}.\vec{\omega}$

2- Puissance des forces P(S/ $\mathcal{E}$) : $P(S/A) = (\tau_v, \tau_F) = \vec{v}.\vec{F} + \vec{M}.\vec{\omega}$

3- Glisseurs et couples

3-1 Glisseur

3-1-1 *Définition*

Un glisseur est un torseur associé à un vecteur lié $(A,\vec{R})$ de champ antisymétrique $\vec{M}_A(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}$. Le champ ainsi défini est le moment du torseur de vecteur $\overrightarrow{R}$. On note le glisseur par : $\tau_A = [\overrightarrow{R}, \overrightarrow{M}_A(P)] = g_A$.

Exemple :

Le moment cinétique d'un point matériel en mouvement de rotation dans un repère $\mathcal{R}$ est un glisseur dont le torseur associé au vecteur impulsion $(O,\vec{p})$ est $\tau_O = [\vec{p} = m\vec{v}, \vec{\sigma}_O(P) = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}]$

3-1-2 Propriétés

i) Support de g_A.

Soit un glisseur g_A de vecteur $\overrightarrow{R} \neq 0$ et de moment $\vec{M}_A(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}$, on appelle support de g_A l'ensemble des points $P \in \mathcal{E}$ de moment nul : *Supp* $g_A = \{P : \vec{M}_A(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R} = 0\}$. C'est la droite passant par le point A et engendrée par $\overrightarrow{R}$.

ii) Condition nécessaire et suffisante(CNS) pour qu'un torseur soit un glisseur

- si $\exists P \in \mathcal{E}$: le moment $\vec{M}(P)$ du torseur est nul ; i.e $\vec{M}(P) = 0$, ce torseur est un glisseur.
- Si un torseur de vecteur $\overrightarrow{R}$ a un moment nul en A, ce torseur est le glisseur associé au vecteur lié $(A,\vec{R})$.
- Etant donné un point $P \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{R}$ et $\vec{M}(P)$ deux vecteurs perpendiculaires, il existe un glisseur et un seul ayant $\overrightarrow{R}$ pour vecteur et $\vec{M}(P)$ pour moment au point P: $g = [\overrightarrow{R}, \overrightarrow{M}(P)]$

Remarques

i) L'invariant scalaire d'un glisseur $\mu = \vec{R} \cdot \vec{M}(P) = 0$

ii) Le sous ensemble de glisseurs non nuls dont le support passe par un point A donné, et du glisseur nul est un sous espace vectoriel à 3-dimensions de l'espace vectoriel des torseurs. Seule la donnée de $\vec{R}=(R_x,R_y,R_z)$ permet de déterminer le torseur glisseur.

3-2 Couples

Un torseur est un couple si et seulement si il possède l'une ou l'autre des propriétés équivalentes suivantes :

1- $\vec{R}=0$

2- $\vec{M}=\vec{cst}$

Remarque

L'ensemble des couples est un sous espace vectoriel de dimension 3 de l'espace vectoriel des torseurs. Seule la donnée de $\vec{M}=(M_x,M_y,M_z)$ permet de déterminer le torseur glisseur.

4- Décomposition d'un torseur

4-1 Décomposition d'un torseur en un couple et un glisseur

Tout torseur d'éléments de réduction $(A,\vec{R})$ et $\vec{M}(P)$ définis en un point P de l'espace affine $\mathcal{E}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\tau = [\vec{R}, \vec{M}(P)] = [\vec{R}, 0] + [0, \vec{M}(P)]$$
$$= g_A + \mathcal{C}$$

où g_A est un glisseur dont le support Δ passe par A et il est parallèle à $\vec{R}$ et $\mathcal{C}$ un couple ayant pour moment $\vec{M}(A)$.

Cette décomposition qui est unique montre que l'espace vectoriel des torseurs est la somme directe du sous espace vectoriel des couples et des glisseurs non nuls de support $(A,\vec{R})$ augmenté du glisseur nul.

Si g_A // $\mathcal{C}$ ($\vec{R} // \vec{M}(P)$), alors l'ensemble des points P n'est autre que l'axe central Δ du torseur τ.

4-2 Décomposition d'un torseur en deux glisseurs

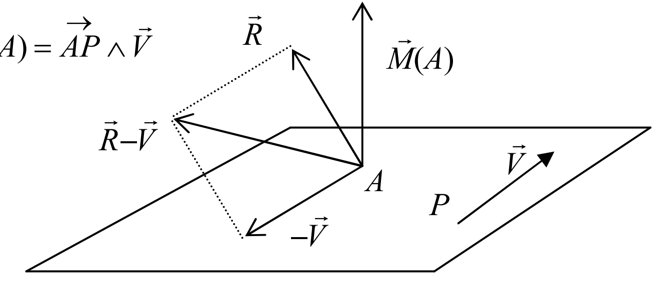
Tout torseur $\tau = [\vec{R}, \vec{M}(A)]$ peut être décomposé en deux glisseurs définis en deux points différents. En effet :

Supposons qu'il existe un vecteur $\vec{V}$: $\vec{M}(A) = \vec{AP} \wedge \vec{V}$

Le moment au point P peut s'écrire:

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{PA} \wedge \vec{V} = 0$$

$$\tau = [\vec{R}, \vec{M}(A)] = [\vec{R}, 0] + [0, \vec{M}(A)]$$
$$= [\vec{R}-\vec{V}, 0]_A + [\vec{V}, \vec{M}(A)]_A$$



$\tau = [\vec{R}\text{-}\vec{V}, 0]_A + [\vec{V}, 0]_P$

$[\vec{R}\text{-}\vec{V}, 0]_A$ est associé au glisseur $(A, \vec{R}-\vec{V})$ tandis que le torseur $[\vec{V}, 0]_P$ est associé au glisseur $(P, \vec{V})$.

5- Classification des torseurs

La classification des torseurs se fait en fonction de l'invariant scalaire $\mu(P) = \vec{R}\,.\,\vec{M}(P)$

5-1 $\mu(P) = 0$

Pour ce cas où l'invariant scalaire est nul 4 cas se présentent :

i) $\vec{R} = \vec{M} = 0 \Leftrightarrow \tau$ = torseur nul

ii) $\vec{R} = 0$ et $\vec{M} \neq 0 \Leftrightarrow \tau = \mathcal{C}$ = torseur couple

Vue que tout torseur peut être décomposé en deux glisseurs, le couple $\mathcal{C}$ peut être décomposé en deux glisseurs parallèles, de même norme et de sens opposés :

$$\mathcal{C} = [0, \vec{M}(A)] = [\vec{V}\ 0]_P + [-\vec{V}, 0]_A$$

avec $\vec{M}(A) = \vec{AP} \wedge \vec{V}$

iii) $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}(A) = 0 \Leftrightarrow \tau = g_A$; i.e torseur glisseur avec A $\in \Delta$, axe du glisseur.

iv) $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}(A) \neq 0$

Vue que $\mu = \vec{R}\,.\,\vec{M}(P) = 0$, alors τ est un glisseur.

Si $B \in \Delta$ alors $\vec{M}(B) = 0$ et par conséquent $\vec{M}(A) = \vec{M}(B) + \vec{AB} \wedge \vec{R} = \vec{AB} \wedge \vec{R} \Rightarrow \vec{M}(A) \perp \vec{R}$.

5-2 $\mu(P) \neq 0$

Le torseur τ n'est ni un couple ni un glisseur. Cependant il peut être décomposé en une somme d'un couple et d'un glisseur tous deux différents du torseur nul :

$$\tau = g_A + \mathcal{C} \quad \forall\ A \in \mathcal{E}.$$

6- Torseurs à structure

Un torseur à structure est un torseur défini en tout point *P* d'un domaine $\mathcal{D}$ relativement à une mesure $d\mu$. Ses éléments de réduction sont définis par :

$$\tau_F = \left[\int_{P\in D} \vec{F}(P)\, d\mu \ ;\ \int_{P\in D} \vec{AP} \wedge \vec{F}(P)\, d\mu \right]$$

Propriété

Soit τ un torseur quelconque défini au point *A* : $\tau = [\vec{R}, \vec{M}(A)]$, son comoment avec le torseur à structure est :

$$(\tau_F, \tau) = \vec{R}\,.\int_{P\in D} \vec{AP} \wedge \vec{F}(P)\, d\mu + \vec{M}(A)\,.\int_{P\in D} \vec{F}(P)\, d\mu$$

$$= \vec{R} \,.\, \int_{P\in D} \vec{AP} \wedge \vec{F}(P)\, d\mu \;+\; \int_{P\in D} (\vec{M}(P) + \vec{PA} \wedge \vec{R}) \,.\, \vec{F}(P)\, d\mu$$

$$= \int_{P\in D} \vec{M}(P) \,.\, \vec{F}(P)\, d\mu$$

7- Equiprojectivité

Le champ des moments d'un torseur est équiprojectif. En effet on a :

$$\vec{M}(A) = \vec{M}(B) + \vec{AB} \wedge \vec{R} \;\Rightarrow\; \vec{AB} \,.\, \vec{M}(A) = \vec{AB} \,.\, \vec{M}(B)$$

ChapII
Cinématique du solide

La cinématique est l'étude des mouvements des corps indépendamment des causes qui les produisent. Elle s'appuie uniquement sur les notions d'espace et du temps.

I- Propriétés cinématiques du solide

1- Définitions

Un solide indéformable **S** est un ensemble de points matériels dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps. Mathématiquement on peut le définir comme un domaine (**S**) de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ tel que : $\forall\, P, Q \in \mathbf{S} \qquad //\overrightarrow{PQ}// = cst$

L'ensemble d'un repère d'espace muni d'un repère de temps constituent un référentiel.

Dans le cadre de la cinématique classique on suppose que les référentiels sont munis de la même horloge (synchronisation) donc un temps universel absolu.

Dans l'étude de la cinématique d'un solide (**S**) en mouvement dans $\mathcal{E}$ on utilise en général 3 types de repères :

i- Repère absolu

C'est le repère du laboratoire qui sera noté $\mathfrak{R}_s : (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

ii- Repère lié au solide **S** :

C'est un repère noté $\mathfrak{R}_s : (O_S ; \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S)$ dont la base orthonormée directe de l'espace vectoriel ***E***, $(\vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S)$, engendre les orientations de (**S**) lors de son mouvement dans $\mathfrak{R}$.

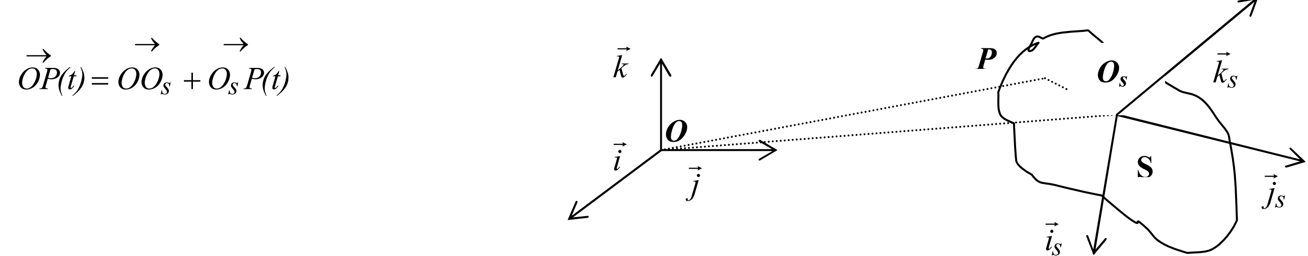
iii- Repères intermédiaires

Il sont des repères très utiles dans l'étude des mouvements complexes (composés) des solides dans $\mathfrak{R}$. Ils seront notés par $\mathfrak{R}_i : (O_i ; \vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i)$

2- Champ de vitesse d'un solide

Soit (**S**) un solide en mouvement dans l'espace $\mathcal{E}$ et soit $P(t)$ un point quelconque de (**S**)

$$\overrightarrow{OP(t)} = \overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_S P(t)}$$



2-1 *Définition*

On appelle $\vec{V}_t\,(\mathbf{S}/\mathfrak{R})$, le champ des vitesses de ***S***/$\mathfrak{R}$ à l'instant *t* le champ qui pour tout point $P(t) \in (\mathbf{S})$, on associe le vecteur vitesse de ce point matériel :

$$\vec{V}_t\,(\mathbf{S}/\mathfrak{R}) : \ P \in (S) \rightarrow \vec{V}(P \in \mathbf{S}/\mathfrak{R}) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{\mathfrak{R}}$$

2-2 *Propriétés du champ de vitesse*

2-2-1 Champ de vitesse antisymétrique

Soient $P(t)$ et $Q(t)$ deux points de (***S***) en mouvement / $\mathfrak{R}$

$//P(t)Q(t)//^2$ = cste

$2\overrightarrow{PQ}(t).[\vec{V}(Q\in S/\mathfrak{R})-\vec{V}(P\in S/\mathfrak{R})]=0$

vue que $\vec{V}(P\in(\mathbf{S})/\mathfrak{R})\neq 0$ et $\vec{V}(Q\in(\mathbf{S})/\mathfrak{R})\neq 0$, on obtient

$$\overrightarrow{PQ}(t).\vec{V}(Q\in S/\mathfrak{R})=\overrightarrow{PQ}(t).\vec{V}(P\in S/\mathfrak{R})$$

Le champ de vitesse $\vec{V}_t\,(\mathbf{S}/\mathfrak{R})$ d'un solide est un champ équiprojectif donc antisymétrique.

2-2-2 Torseur cinématique(torseur de vitesse)

$\vec{V}_t\,(\mathbf{S}/\mathfrak{R})$ étant un champ antisymétrique, alors $\forall\, P, Q\in(\mathbf{S})\,\exists$ à tout instant t un vecteur $\vec{\omega}_t\,(S/\mathfrak{R})$:

$$\vec{V}(Q\in S/\mathfrak{R})-\vec{V}(P\in S/\mathfrak{R})=\overrightarrow{PQ}\wedge\vec{\omega}_t\,(S/\mathfrak{R})$$

On note alors le torseur cinématique par :

$$\mathcal{T}_v=[\vec{\omega}(S/R)\,,\vec{V}(S/\mathfrak{R})]$$

dont les éléments de réduction sont :

$\vec{\omega}(S/\mathfrak{R})$: la résultante de $\mathcal{T}_v$. C'est la vitesse instantanée de rotation du solide $\mathbf{S}/\mathfrak{R}$

$\vec{V}(\mathbf{S}/\mathfrak{R})$: le moment de $\mathcal{T}_v$

La loi de transformation des moments d'un torseur permet d'obtenir la vitesse en tout point $P\in(\mathbf{S})$ en fonction des éléments de réduction du torseur $\mathcal{T}_v$ en un point particulier :

$$\vec{V}(P\in S/\mathfrak{R})=\vec{V}(Q\in S/\mathfrak{R})+\overrightarrow{PQ}\wedge\vec{\omega}(S/\mathfrak{R})$$

2-3 *Axe du torseur cinématique* $\mathcal{T}_v$

Si le vecteur $\vec{\omega}(S/\mathfrak{R})\neq 0$, l'axe du torseur $\mathcal{T}_v$ est l'ensemble des points $P\in\Delta$, axe centrale du torseur, appelé aussi axe de viration ou axe instantané de rotation et de glissement dans le mouvement de $\mathfrak{R}_s/\mathfrak{R}$ tel que $\vec{\omega}(S/\mathfrak{R})\,//\,\vec{V}(\mathbf{S}/\mathfrak{R})$ on a

$\forall\, P\in\Delta \qquad \vec{\omega}(\mathbf{S}/\mathfrak{R})=\alpha\,\vec{V}(P/\mathfrak{R})$

$$\vec{V}(Q\in\mathbf{S}/\mathfrak{R})=\vec{V}(P/\mathfrak{R})+\alpha\,\vec{V}(P/\mathfrak{R})\wedge\overrightarrow{PQ}$$

On constate que à tout instant t le mouvement du solide peut être décomposé en un mouvement de translation, le long de l'axe instantané de rotation, de vitesse $\vec{V}(P\in\Delta)$ et d'une rotation instantanée, autour de l'axe instantané de rotation Δ, de vitesse angulaire $\vec{\omega}(S/\mathfrak{R})$.

L'axe du torseur $\mathcal{T}_v$ n'est autre que l'axe de rotation instantanée de $\mathbf{S}/\mathfrak{R}$. Alors la vitesse des points $P\in\Delta$ est minimale.

L'axe central est défini par : $\Delta=\left\{P\ /\ \overrightarrow{O_sP}=\dfrac{\vec{\omega}(\mathbf{S}/\mathfrak{R})\wedge\vec{V}(O_s/\mathfrak{R})}{\vec{\omega}^2(\mathbf{S}/\mathfrak{R})}+\lambda\vec{\omega}(\mathbf{S}/\mathfrak{R})\right\}$

$$\vec{V}(P)=\vec{V}(O_s)+\vec{\omega}(\mathbf{S}/\mathfrak{R})\wedge\overrightarrow{O_sP}$$

$$=\vec{V}(O_s)+\frac{\vec{\omega}.\vec{V}(O_s/\mathfrak{R})}{\vec{\omega}^2(\mathbf{S}/\mathfrak{R})}\vec{\omega}-\frac{\vec{\omega}.\vec{\omega}}{\vec{\omega}^2(\mathbf{S}/\mathfrak{R})}\vec{V}(O_s)$$

$$\vec{V}(P \in \Delta) = \frac{\mu(O_S)}{\vec{\omega}^2(\mathbf{S}/\Re)}\,\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re)$$

avec $\mu(O_S) = \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re).\vec{V}(O_S/\Re)$
Si $\mu = 0$ on a axe de rotation.
Si $\mu \neq 0$ on a axe de viration

3- Champ des accélérations
Par dérivation de la relation d'antisymétrie du champ de vitesse

$\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) \wedge \overrightarrow{AM}$

on obtient le champ d'accélération dans un solide :

$$\vec{\gamma}(M \in \mathbf{S}/\Re) = \vec{\gamma}(A \in \mathbf{S}/\Re) + \frac{d\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re)}{dt}/_{\Re} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) \wedge (\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) \wedge \overrightarrow{AM})$$

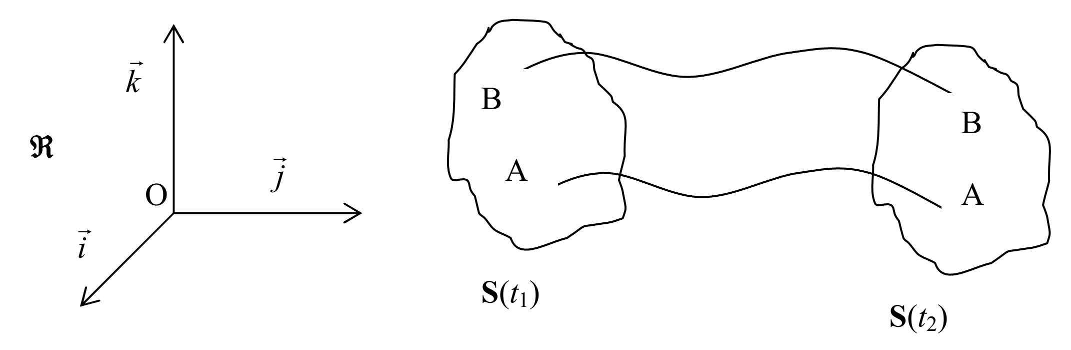
Le champ d'accélération $\vec{\gamma}_t\,(\mathbf{S}/\Re)$ n'est pas un champ antisymétrique.

II- Mouvements d'un solide

1- Définition
On distingue en général différents types de mouvements d'un solide (**S**) / $\Re$:

- i- Mouvement de translation
- ii- Mouvement de rotation autour d'un axe ou d'un point
- iii- Une composée d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation.

Considérons deux points A et B d'un solide (**S**) en mouvement par raport à un repére $\Re$ dans l'espace affine $\mathcal{E}$. Ces deux points effectuent deux trajectoires différentes



$\vec{u}$ est le vecteur unitaire qui engendre les orientations de la droite AB au cours du temps.

$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = //\overrightarrow{AB}//\,\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{V}(B) - \vec{V}(A) = \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) \wedge \overrightarrow{AB}$

Différentes situations sont possibles :

i- si $\vec{u}(t) = \overrightarrow{\text{cst}}$, alors $\vec{V}(A \in \mathbf{S}/\Re) = \vec{V}(B \in \mathbf{S}/\Re)$ on dit que (**S**) effectue un mouvement de translation. Dans ce cas $\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) = 0$ et $\mathcal{T}_v$ est un couple de moment $\vec{V}(M/\Re)$ ($\mu(P \in \mathbf{S}) = 0$)

ii- si $\vec{u}(t) \neq \overrightarrow{\text{cst}}$ et $\mu(P) = 0$

a- si $\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) \neq 0$, alors $\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re).\vec{V}(P) = 0$ vue que $\mu(P) = 0$. $\mathcal{T}_v$ est donc un torseur glisseur dont les points situés sur l'axe centrale du torseur ont une

vitesse nulle ($\forall P \in \Delta \;\; \vec{V}(P) = 0$). On a un mouvement de rotation de (**S**) autour de Δ. Deux cas se présentent :

α) $\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) // \vec{e}_\Delta$ ($\vec{e}_\Delta$ est un vecteur unitaire porté par l'axe Δ). Si ∃ O_s :

$\vec{V}(O_s) = 0$ alors $\vec{V}(P \in \Delta) = \vec{V}(O_s) + \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) \wedge \overrightarrow{O_s P} = 0$. Donc

$\forall P \in \Delta \quad \vec{V}(P) = 0$.

b) si $\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) \perp \vec{V}(M/\Re)$, alors (S) est animé d'un mouvement "plan sur plan".

b- Si ∃ O_s ∈ (**S**) : $\forall\, t \;\; \vec{V}(O_s) = 0$, alors (S) effectue un mouvement de rotation autour du point O_s : $\vec{V}(P \in \mathbf{S}) = \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) \wedge \overrightarrow{O_s P}$

iii- si $\vec{u}(t) \neq \overrightarrow{\text{cst}}$ et ∄ aucun point de (**S**) fixe dans **ℜ**, alors le mouvement de (**S**) est la composée d'une translation et d'une rotation.

2- Rotation autour d'un axe fixe

2-1 Définition

Le mouvement d'un solide dans l'espace affine $\mathfrak{E}$ est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe si et seulement si ∃ deux points matériels distincts de (**S**) qui soient fixes dans $\mathfrak{E}$.

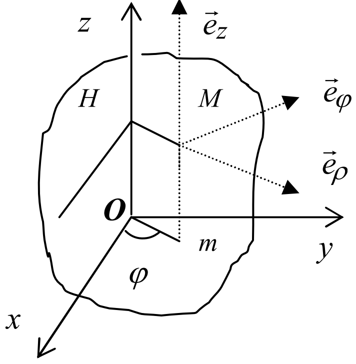
Si A et B sont deux points de (**S**) fixes dans $\mathfrak{E}$, il en résulte que tous les points sur la droite AB restent fixes. C'est l'axe de rotation de (**S**)/**ℜ** noté Δ.

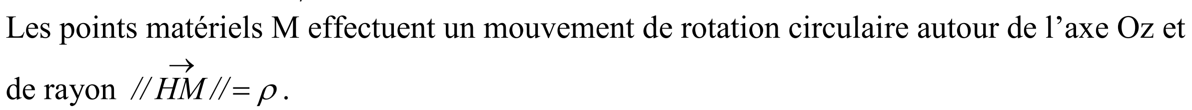
si on prend $\Delta // \vec{e}_z$, $\forall P \in \Delta \;\; \vec{V}(P) = 0$

et $\forall M \in (\mathbf{S}) \;\; \vec{V}(M) = \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) \wedge \overrightarrow{OM}$ car $\vec{V}(O) = 0$

$\vec{V}(M \in \mathbf{S}) = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OM} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z \wedge \| \overrightarrow{HM} \| \vec{e}_\rho$

$\vec{V}(M \in \mathbf{S}) = \dot{\varphi}\, \| \overrightarrow{HM} \|\, \vec{e}_\varphi$




Les points matériels M effectuent un mouvement de rotation circulaire autour de l'axe Oz et de rayon $\| \overrightarrow{HM} \| = \rho$.

2-2 Propriétés

i- Le torseur $\mathcal{T}_v$ est un glisseur d'axe Oz : $\mathcal{T}_v = \mathfrak{g}_O = [\dot{\varphi}\, \vec{e}_z, 0]$

ii- $\vec{\gamma}(M \in \mathbf{S}/\Re) = \rho\, \ddot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi - \rho\, \dot{\varphi}^2\, \vec{e}_\rho = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$

iii- si $\dot{\varphi} = cste$, le mouvement de rotation est uniforme.

2-3 Mouvement hélicoïdal simple

2-3-1 Définition

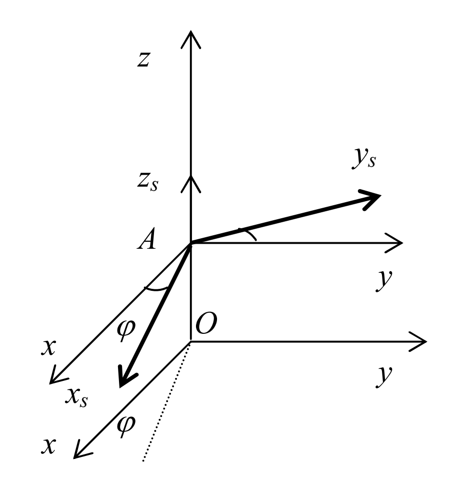
Un mouvement hélicoïdal simple est une combinaison d'un mouvement de translation rectiligne et d'un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle à la direction de translation.

Considérons une translation parallèle à l'axe *oz* ≡ Δ (axe de rotation de (**S**)/**ℜ**). Soit A un point ∈(**S**) sur *oz*

Si on pose $\overrightarrow{OA} = h(t)\, \vec{k}$

$\forall\, M \in S \quad \vec{V}(M\in\mathbf{S}) = \dot{h}(t)\,\vec{k} + \vec{\omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AM}$

$$\vec{V}(M\in\mathbf{S}) = \dot{h}(t)\,\vec{k} + \dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{AM}$$



2-3-2 Propriétés

i- L'invariant scalaire et vectoriel de τ_v

$$\mu = \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re).\vec{V}(M\in\mathbf{S}) = \dot{\varphi}(t)\,\dot{h}(t)$$

$$\vec{I} = \frac{\dot{\varphi}\,\dot{h}}{\dot{\varphi}^2}\,\dot{\varphi}\,\vec{k} = \dot{h}\,\vec{k} = \vec{V}(A\in\Re_S/\Re)$$

L'invariant vectoriel n'est autre que la vitesse de translation du solide le long de l'axe oz. On l'appelle vitesse de glissement.

ii- Classification des mouvements

a- si $\mu(M) = 0$

Soit $\dot{\varphi} = 0$, on a un mouvement de translation rectiligne parallèle à *oz*. τ_v est un couple.

Soit $\dot{h} = 0$, on a un mouvement de rotation autour de *oz*. τ_v est un glisseur d'axe oz.

b- $\mu(M) \neq 0$

Le mouvement est une combinaison d'un mouvement de translation parallèle à *oz* et d'un mouvement de rotation autour de *oz*. τ_v peut être décomposé en un couple $\mathcal{C} = [0, \vec{I}\,]$ et un glisseur $\mathcal{g} = [\dot{\varphi}\,\vec{k}\ ,0]$ parallèles à l'axe du torseur $\vec{k} \equiv \overrightarrow{oz}$ qui est aussi l'axe de rotation.

On note finalement que si $\dot{\varphi} = cste$, le mouvement hélicoïdal est uniforme.

3- Rotation d'un solide autour d'un point : angles d'Euler

Un solide (**S**) est en rotation autour d'un point fixe *O* de $\mathfrak{R}$ si il existe un point O_s de $\mathfrak{R}_s$, repère lié au solide (**S**), qui coïncide à tout instant avec le point *O*.

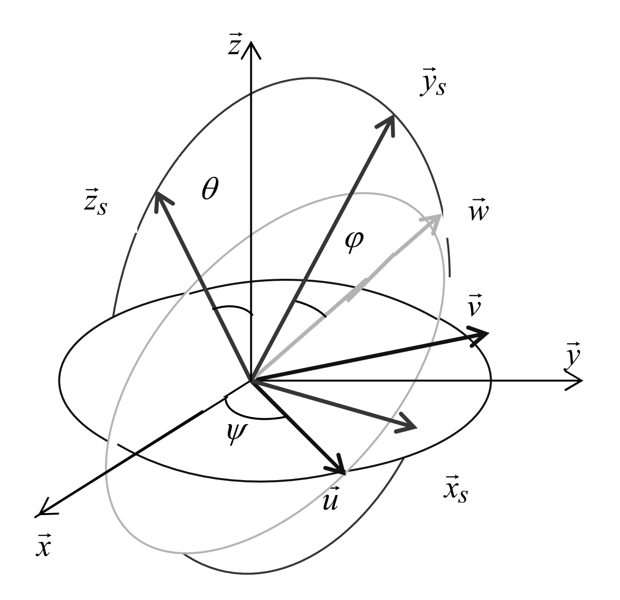
Angles d'Euler

Les angles d'Euler, qui sont en nombre de 3 (ψ, θ, φ), constituent un paramétrage de la rotation d'un solide (**S**) autour d'un point *O*. Leurs variations au cours du temps engendrent la rotation du solide (**S**) autour de *O*.

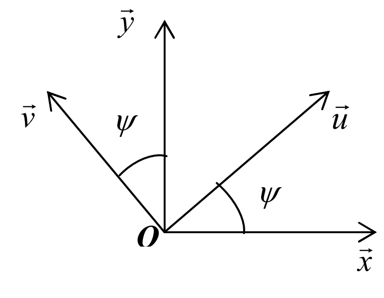
Considérons un solide (S) en rotation autour d'un point fixe O, origine du repère $\mathfrak{R}$ fixe. Supposant qu'à $t = 0$ $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_s$.

Soient $\Re(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère fixe et $\Re_S(O, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ le repère lié au solide. Supposant que *Oz* et Oz_s ne soient pas colinéaires (si non ce serait une rotation autour d'un axe fixe). Alors les plans (*O*, *x* ,*y*) et (*O*, x_s, y_s) se coupent suivant une droite sur laquelle on choisira l'axe *Ou*. Cet axe est appelé ligne des nœuds.

Soient les repères orthonormés directs intermédiaires $\Re_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ et $\Re_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_S)$. Le passage de $\Re(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à $\Re_S(O, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ se fait par l'intermédiaire de $\Re_1$ et $\Re_2$ en effectuant 3 rotations :



1- une rotation d'angle ψ autour de l'axe Oz : précession



$$\Re(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \xrightarrow{\vec{\omega}(\Re_1/\Re)=\dot{\psi}\vec{k}} \Re_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z})$$

$$\vec{u} = \cos\psi\ \vec{x} + \sin\psi\ \vec{y}$$

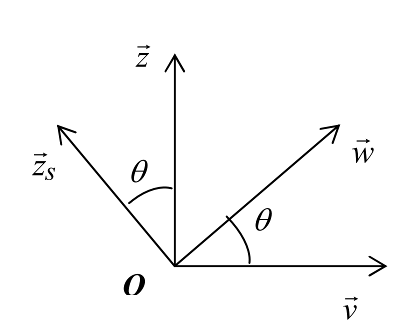
$$\vec{v} = -\sin\psi\ \vec{x} + \cos\psi\ \vec{y}$$

qu'on peut écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi\\ -\sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{y}\end{pmatrix}$$

$\psi(t)$ est appelé angle de précession.

2- une rotation d'angle θ autour de l'axe Ou : nutation



$$\Re_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}) \xrightarrow{\vec{\omega}(\Re_2/\Re_1)=\dot{\theta}\vec{u}} \Re_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z}_S)$$

$$\vec{w} = \cos\theta\ \vec{v} + \sin\theta\ \vec{z}$$

$$\vec{z}_S = -\sin\theta\ \vec{v} + \cos\theta\ \vec{z}$$

qu'on peut écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix}\vec{w}\\ \vec{z}_S\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \vec{z}\end{pmatrix}$$

$\theta(t)$ est appelé angle de nutation.

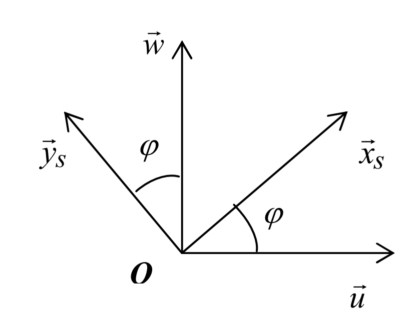
3- une rotation d'angle φ autour de l'axe Oz_s : rotation propre

$$\Re_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z}_S) \xrightarrow{\vec{\omega}(\Re_s/\Re_2)=\dot{\varphi}\vec{z}_s} \Re_S(O,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$$

$\vec{x}_S = \cos\varphi\, \vec{u} + \sin\varphi\, \vec{w}$

$\vec{y}_S = -\sin\varphi\, \vec{u} + \cos\varphi\, \vec{w}$

qu'on peut écrire matriciellement



$$\begin{pmatrix} \vec{x}_S \\ \vec{y}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \end{pmatrix}$$

$\varphi(t)$ est appelé angle propre.

Le mouvement de rotation de $\mathfrak{R}_s/\mathfrak{R}$ est composé de 3 mouvements successifs et chacun des mouvements est une rotation autour d'un axe fixe. D'après la loi de composition des vitesses de rotation on a :

$$\vec{\omega}(\mathfrak{R}_S/\mathfrak{R}) = \vec{\omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) + \vec{\omega}(\mathfrak{R}_2/\mathfrak{R}_1) + \vec{\omega}(\mathfrak{R}_S/\mathfrak{R}_2)$$

Ce résultat peut être déduit d'une autre manière :

$\vec{V}(M \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) = \vec{\omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{OM}$

$\vec{V}(M \in \mathfrak{R}_2/\mathfrak{R}_1) = \vec{\omega}(\mathfrak{R}_2/\mathfrak{R}_1) \wedge \overrightarrow{OM}$

$\vec{V}(M \in \mathfrak{R}_S/\mathfrak{R}_2) = \vec{\omega}(\mathfrak{R}_S/\mathfrak{R}_2) \wedge \overrightarrow{OM}$

$\vec{V}(M \in \mathfrak{R}_S/\mathfrak{R}) = \vec{\omega}(\mathfrak{R}_S/\mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{OM}$

Ce qui conduit à

$$\vec{\omega}(\mathfrak{R}_S/\mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}(\mathfrak{R}_2/\mathfrak{R}_1) \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}(\mathfrak{R}_S/\mathfrak{R}_2) \wedge \overrightarrow{OM}$$

d'ou le résultat

$$\vec{\omega}(\mathfrak{R}_S/\mathfrak{R}) = \dot{\psi}\, \vec{z} + \dot{\theta}\, \vec{u} + \dot{\varphi}\, \vec{z}_S$$

III Changement de référentiel

La cinématique des mouvements complexes dits composés nécessite l'introduction de repères intermédiaires $\mathfrak{R}_i$. Le passage d'un référentiel à un autre se fait par l'intermédiaire des relations générales.

1- Dérivation composée

Soit un vecteur $\vec{U}$ de l'espace vectoriel ***E*** à 3 d variable dans le temps par rapport aux deux repères $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathfrak{R}'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

$\vec{U} = x(t)\, \vec{i} + y(t)\, \vec{j} + z(t)\, \vec{k} = x'(t)\, \vec{i}' + y'(t)\, \vec{j}' + z'(t)\, \vec{k}'$

$\frac{d\vec{U}}{dt}/_{\mathfrak{R}} = \dot{x}\, \vec{i} + \dot{y}\, \vec{j} + \dot{z}\, \vec{k}$

$\frac{d\vec{U}}{dt}/_{\mathfrak{R}'} = \dot{x}'\, \vec{i}' + \dot{y}'\, \vec{j}' + \dot{z}'\, \vec{k}'$

or $\frac{d\vec{U}}{dt}/_{\mathfrak{R}} = \dot{x}'\, \vec{i}' + \dot{y}'\, \vec{j}' + \dot{z}'\, \vec{k}' + x' \frac{d\vec{i}'}{dt}/_{\mathfrak{R}} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt}/_{\mathfrak{R}} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}/_{\mathfrak{R}}$

d'où $\frac{d\vec{U}}{dt}/_{\Re} = \frac{d\vec{U}}{dt}/_{\Re'} + \vec{\omega}(\Re'/\Re) \wedge x\vec{i}' + \vec{\omega}(\Re'/\Re) \wedge y\vec{j}' + \vec{\omega}(\Re'/\Re) \wedge z\vec{k}'$

$$\frac{d\vec{U}}{dt}/_{\Re} = \frac{d\vec{U}}{dt}/_{\Re'} + \vec{\omega}(\Re'/\Re) \wedge \vec{U}$$

Remarque
On peut utiliser la relation des vitesses du solide pour déterminer la loi des accélérations à partir de la dérivation composée.

$$\vec{V}(A \in \mathbf{S}/\Re) = \vec{V}(B \in \mathbf{S}/\Re) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re)$$

$$\frac{d\vec{V}(A \in \mathbf{S}/\Re)}{dt}/_{\Re} = \frac{d\vec{V}(B \in \mathbf{S}/\Re)}{dt}/_{\Re} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}/_{\Re} \wedge \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) + \overrightarrow{AB} \wedge \frac{d\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re)}{dt}/_{\Re}$$

$$\vec{\gamma}(A \in \mathbf{S}/\Re) = \vec{\gamma}(B \in \mathbf{S}/\Re) + \overrightarrow{AB} \wedge \frac{d\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re)}{dt}/_{\Re} + (\vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re) \wedge \overrightarrow{AB}) \wedge \vec{\omega}(\mathbf{S}/\Re)$$

2- Composition des vitesses

2-1 Loi de composition
Soit un solide (**S**) en mouvement par rapport à $\mathfrak{R}$ et à $\mathfrak{R}'$ et soit $M \in$ (**S**).

$$\vec{V}(M \in \mathbf{S}/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/_{\Re} \qquad ; \quad \vec{V}(M \in \mathbf{S}/\Re') = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/_{\Re'}$$

Or $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$$\vec{V}(M \in \mathbf{S}/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/_{\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/_{\Re} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/_{\Re}$$

$$= \vec{V}(O'/\Re) + \vec{V}(M/\Re') + \vec{\omega}(\Re'/\Re) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{V}(M/\Re') = \vec{V}(O'/\Re) + \vec{\omega}(\Re'/\Re) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{V}(M/\Re')$$

$$\vec{V}(M/\Re') = \vec{V}_e(M) + \vec{V}(M/\Re')$$

La vitesse de $M \in$ (**S**) est décomposée en deux termes :

- $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O'/\Re) + \vec{\omega}(\Re'/\Re) \wedge \overrightarrow{O'M}$, c'est la vitesse d'entraînement ou la vitesse du point coïncidant M^* à l'instant t supposé fixe dans $\mathfrak{R}$ mais a les mêmes coordonnées que M à cet instant.
- $\vec{V}(M \in \mathbf{S}/\Re')$, c'est la vitesse relative de $M/\mathfrak{R}'$.

D'après le théorème du point coïncidant la vitesse du point $M \in$ (**S**) peut s'écrire :

$$\vec{V}(M/\Re') = \vec{V}(M^* \in \Re'/\Re) + \vec{V}(M/\Re')$$

2-2 Torseur vitesse dans un mouvement composé
Soient $\mathfrak{R}_2$ un repère lié au solide (**S**) en mouvement $/\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_1$ un repère intermédiaire en mouvement $/\mathfrak{R}_0$ et $M \in$ (**S**) fixe dans $\mathfrak{R}_2$. Les éléments de réduction du torseur vitesse du point M de $\mathbf{S}/\mathfrak{R}_0$ sont :

$\tau_V^{20}(M \in \Re_2/\Re_0) = [\vec{\omega}(\Re_2/\Re_0), \vec{V}(M \in \Re_2/\Re_0)]$.

De même les coordonnées des torseurs vitesse du point $M \in \mathfrak{R}_2/\mathfrak{R}_1$ et celui du point coïncident $M \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0$ sont respectivement :

$\tau_V^{21}(M \in \Re_2/\Re_1) = [\vec{\omega}(\Re_2/\Re_1), \vec{V}(M \in \Re_2/\Re_1)]$

$\tau_v^{10}(M\in\Re_1/\Re_0)=[\vec{\omega}(\Re_1/\Re_0)\,,\vec{V}(M\in\Re_1/\Re_0)]$

D'après la loi de composition

$\vec{\omega}(\Re_2/\Re_0)=\vec{\omega}(\Re_2/\Re_1)+\vec{\omega}(\Re_1/\Re_0)$

$\vec{V}(M\in\Re_2/\Re_0)=\vec{V}(M\in\Re_2/\Re_1)+\vec{V}(M\in\Re_1/\Re_0)$

il en résulte la propriété d'addition des torseurs :

$$\tau^{20}=\tau^{21}+\tau^{10}$$

Cette relation peut être généralisée à plusieurs repères intermédiaires :

$$\tau^{p0}=\sum_{i=0}^{p-1}\tau^{i+1,i}$$

Conséquences

i- $\tau^{ij}+\tau^{ji}=\tau^{ii}=0 \Rightarrow \tau^{ij}=-\tau^{ji}$. C'est le torseur vitesse inverse de τ^{ij}.

ii- La loi de décomposition des vitesses d'un solide (**S**) dans un repère est valable aussi au niveau des torseurs.

3- Composition des accélérations

Par dérivation de l'équation

$\vec{V}(M/\Re')=\vec{V}(O'/\Re)+\vec{\omega}(\Re'/\Re)\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{V}(M/\Re')$

on obtient

$$\vec{\gamma}(M\in\mathbf{S}/\Re)=\vec{\gamma}(O'/\Re)+\frac{d\vec{\omega}(\Re'/\Re)}{dt}/_{\Re}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}(\Re'/\Re)\wedge\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/_{\Re}+\frac{d\vec{V}(M/\Re')}{dt}/_{\Re}$$

or

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/_{\Re}=\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/_{\Re'}+\vec{\omega}(\Re'/\Re)\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\frac{d\vec{V}(M/\Re')}{dt}/_{\Re}=\frac{d\vec{V}(M/\Re')}{dt}/_{\Re'}+\vec{\omega}(\Re'/\Re)\wedge\vec{V}(M/\Re')$$

Il vient

$$\vec{\gamma}(M\in S/\Re)=\vec{\gamma}_r(M/\Re')+\vec{\gamma}_e(M/\Re)+\vec{\gamma}_c(M/\Re)$$

avec

$$\vec{\gamma}_r(M/\Re')=\frac{d\vec{V}(M/\Re')}{dt}/_{\Re'}$$

$$\vec{\gamma}_e(M/\Re)=\vec{\gamma}(O'/\Re)+\frac{d\vec{\omega}(\Re'/\Re)}{dt}/_{\Re}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}(\Re'/\Re)\wedge(\vec{\omega}(\Re'/\Re)\wedge\overrightarrow{O'M})$$

$$\vec{\gamma}_c(M/\Re)=2\,\vec{\omega}(\Re'/\Re)\wedge\vec{V}(M/\Re')$$

IV- Cinématique des solides en contact

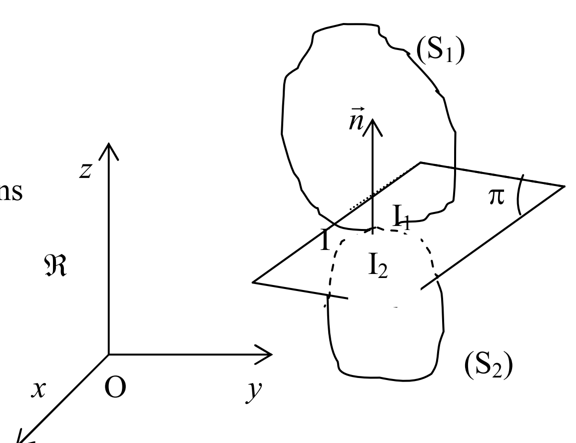
1- Définition

Deux solides (S_1) et (S_2) en mouvement dans $\Re$ sont dits en contact si à tout instant *t*, il existe au moins un point $I_1 \in (S_1)$ et $I_2 \in (S_2)$ qui soient en contact.

Soient :

$\pi_{S1}(I_1)$: le plan tangent à (S_1) au point I_1

$\pi_{S2}(I_2)$: le plan tangent à (S_2) au point I_2



π(I) : le plan tangent à (S_1) et (S_1) au point I
Le plan π est normal à $\vec{n}$.
On distingue au contact de (S_1) et (S_2) 3 points :

i- Le point géométrique de contact I. C'est un point fictif qui varie avec les mouvements de (S_1) et (S_2). On a $\vec{V}(I/\Re) \in \pi$, $\vec{V}(I/(S_2)) \neq 0$ et $\vec{V}(I/(S_1)) \neq 0$.

ii- Le point $I_1 \in (S_1)$; il coïncide avec I à l'instant considérée.
$\vec{V}(I_1 \in (S_1)/\Re) \in \pi_{S1}(I_1)$ et $\vec{V}(I_1 \in S_1/S_2) \neq 0$

iii- Le point $I_2 \in (S_2)$; il coïncide avec I au même instant. $\vec{V}(I_2 \in (S_2)/\Re) \in \pi_{S2}(I_2)$ et
$\vec{V}(I_2 \in S_2/S_1) \neq 0$

2- Vitesse de glissement

2-1 Définition

On appelle vitesse de glissement de (S_1) sur (S_2), notée $\vec{V}_g(I_1)$, la vitesse de I_1 par rapport à (S_2) et elle est donnée par : $\vec{V}_g(I_1) = \vec{V}(I_1 \in S_1/S_2)$.

D'après la loi de composition des mouvements de I_1 entre les référentiels $\Re$ et $\Re_{S2}$ on a :
$\vec{V}(I_1/\Re) = \vec{V}(I_1/S_2) + \vec{V}(I_2/\Re)$; vue que $\vec{V}_e = \vec{V}(I_2/\Re)$.
D'où

$$\vec{V}_g(I_1) = \vec{V}(I_1 \in S_1/S_2) = \vec{V}(I_1/\Re) - \vec{V}(I_2/\Re)$$

2-2 Propriétés

i- La vitesse de glissement ne dépend que des solides en contact. Elle ne dépend pas du référentiel $\Re$ par rapport auquel (S_1) et (S_2) sont en mouvement.

ii- $\vec{V}(I_1 \in S_1/S_2) = -\vec{V}(I_2 \in S_2/S_1)$

iii- $\vec{V}_g \in \pi$. En effet, d'après la loi de composition des vitesses pour (S_1) et (S_2) on a :
$\vec{V}(I/\Re) = \vec{V}(I/S_2) + \vec{V}(I_2/\Re) = \vec{V}(I/S_1) + \vec{V}(I_1/\Re)$
d'où $\vec{V}_g(I_1) = \vec{V}(I_1 \in S_1/S_2) = \vec{V}(I/S_2) - \vec{V}(I/S_1)$.
Puisque $\vec{V}(I/S_1)$ et $\vec{V}(I/S_2) \in \pi$ alors $\vec{V}_g \in \pi$.

iv- Si A est un point fixe $\in \Re_{S1}$, alors par la propriété d'antisymétrie on a :

$$\vec{V}_g(I_1 \in S_1/S_2) = \vec{V}(A \in S_1/S_2) + \vec{\omega}(S_1/S_2) \wedge \overrightarrow{AI_1}$$

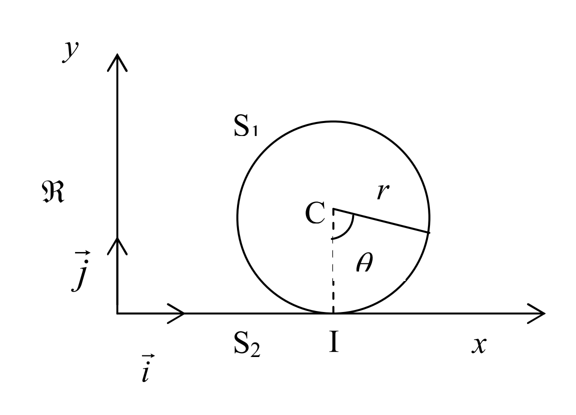
2-3 Exemples

A- Disque vertical en contact avec un plan
(S_1) est le disque de rayon r
(S_2) est le plan horizontal fixe.
La vitesse de glissement est :

$\vec{V}_g = \vec{V}(I_1/\Re) - \vec{V}(I_2/\Re)$

$\vec{V}(I_1/\Re) = \vec{V}(C/\Re) + \vec{\omega}(S_1/\Re) \wedge \overrightarrow{CI_1}$

$= \dot{x}\vec{i} + r\dot{\theta}\vec{j} \wedge \vec{k}$



$\vec{V}(I_2/\Re) = 0$

$\vec{V}_g = (\dot{x} + r\,\dot{\theta})\,\vec{i}$

La condition du roulement sans glissement se traduit par :

$\vec{V}_g = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x} + r\,\dot{\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \Delta x = -\,r\,\Delta\theta$

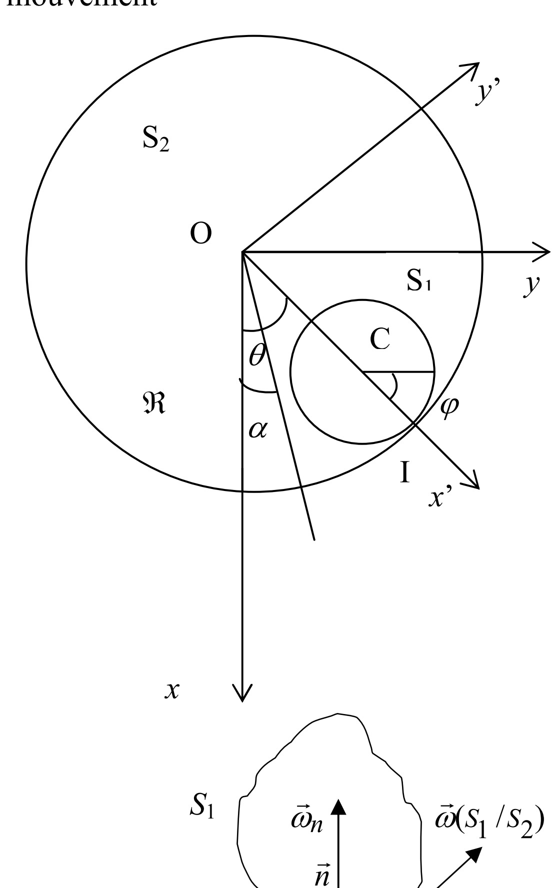
Cette relation traduit l'égalité des longueurs parcourues par le point géométrique I sur le disque et sur la droite (Ox). Le signe (-) traduit la diminution de θ quand x augmente.

B- Disque en contact ponctuel avec un guide circulaire en mouvement

(S_1) est le disque de rayon r

(S_2) est le cerceau de rayon R.

(S2) effectue un mouvement de rotation autour de l'axe Oz. Les angles θ et φ fixent la position d'un point du disque (S_1) tandis que l'angle α fixe celle du guide (S_2)/ $\Re$



$\vec{V}_g = \vec{V}(I_1 \in S_1/\Re) - \vec{V}(I_2 \in S_2/\Re)$

$\vec{V}(I_1 \in S_1/\Re) = \vec{V}(C/\Re) + \vec{\omega}(S_1/\Re) \wedge \overrightarrow{CI_1}$

$= (R-r)\,\dot{\theta}\,\vec{j}' + (\dot{\varphi} + \dot{\theta})\,\vec{k} \wedge r\,\vec{i}'$

$= (R\,\dot{\theta} + r\,\dot{\varphi})\,\vec{j}'$

$\vec{V}(I_2/\Re) = R\,\dot{\alpha}\,\vec{j}'$

$\vec{V}_g = (R\,\dot{\theta} + r\,\dot{\varphi} - R\,\dot{\alpha})\,\vec{j}'$

Le roulement sans glissement est : $R\,\dot{\theta} + r\,\dot{\varphi} - R\,\dot{\alpha} = 0$

Si le guide est fixe ; $\dot{\alpha} = 0 \;\Rightarrow\; R\dot{\theta} = -r\dot{\varphi}$



3- Roulement et pivotement

3-1 Définition

Soient (S_1) et (S_2) deux solides en contact ponctuel Au point I. Les plans tangents Π_{S1} et Π_{S2} en I_1 et I_2 Se confondent et ont pour normale $\vec{n}$.

Le vecteur rotation $\vec{\omega}(S_1/S_2) = \vec{\omega}(S_1/\Re) - \vec{\omega}(S_2/\Re)$

peut être décomposé suivant la normale $\vec{n}$ et la tangente au plan $\Pi(I)$:

$$\vec{\omega}(S_1/S_2) = \vec{\omega}_n(S_1/S_2) + \vec{\omega}_t(S_1/S_2)$$

$\vec{\omega}_n(S_1/S_2)$ est appelé vitesse angulaire de pivotement.

$\vec{\omega}_t(S_1/S_2)$ est appelé vitesse angulaire de roulement.

V- Mouvement plan d'un solide

1- Définition

On appelle mouvement plan d'un solide (S)/ $\mathfrak{R}$, un mouvement tel qu' il existe un plan $\Pi_S \in (S)$ qui se déplace dans un plan parallèle à un plan Π fixe dans $\mathfrak{R}$.

La section du solide liée par le plan Π est donc une figure qui évolue dans $\mathfrak{R}$ sans se déformer.

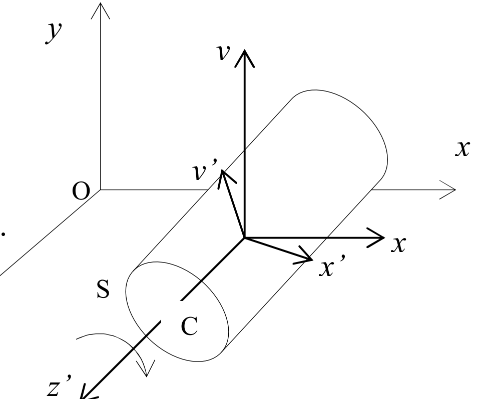
Exemple : Cylindre en mouvement dans le plan *xOy* qui coïncide avec un plan de section droite.

C étant le centre de la section droite .

$\Pi \equiv (xOy)$ est le plan fixe dans $\mathfrak{R}$.

$\Pi_S \equiv (x'O'y')$ est le plan qui coïncide ave le plan Π à tout instant mais $\vec{V}(\Pi_S/\Pi) \neq 0$.

La position de Π_s/Π est en général donnée par 3 paramètres. Dans le cas de cet exemple elle est déterminée à partir du vecteur $\overrightarrow{OC}$ et de l'angle $\theta = (\widehat{\vec{x},\vec{x}'})$.



2- Centre instantané de rotation(CIR)

Considérons un mouvement plan de (S)/$\mathfrak{R}$ et soit $\Pi_S \in (S)$ le plan qui se déplace parallèlement à un plan Π fixe dans $\mathfrak{R}$. Π_s est constamment lié à la section de (S) par Π.

Si $\vec{\omega}(S/\mathfrak{R}) \neq 0$, l'axe instantané de rotation et de glissement Δ existe et il est perpendiculaire au plan Π et Π_s. Il coupe ces plans en un point *I* dont la vitesse est colinéaire à $\vec{\omega}(S/\mathfrak{R})$, $\vec{V}(I \in \Delta) = \frac{\mu}{\omega^2}\vec{\omega}$, et en même temps contenue dans Π_s. Donc $\vec{V}(I/\mathfrak{R}) = 0$.

2-1- Définition

Le centre instantané de rotation (CIR) du plan Π_s, à la date *t*, est le point $I \in (S)$ dont la vitesse par rapport à est nulle , $\vec{V}(I \in \Pi_S/\mathfrak{R}) = 0$.

$$\vec{V}(I \in \Pi_S/\Pi) = \vec{V}(O_S \in \Pi_S/\Pi) + \vec{\omega}(\Pi_S/\mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{O_S I}$$

vue que $\vec{\omega} \perp \overrightarrow{O_S I}$ on obtient $\overrightarrow{O_S I} = \dfrac{\vec{\omega}(\Pi_S/\mathfrak{R}) \wedge \vec{V}(O_S \in \Pi_S/\Pi)}{\vec{\omega}^2(\Pi_S/\mathfrak{R})}$.

Donc le point *I* (CIR) existe et il est unique. Ainsi la connaissance du mouvement de Π_s/Π fournit analytiquement le CIR et en conséquence on a pour tout point $M \in \Pi_S$

$$\vec{V}(M \in \Pi_S) = \vec{\omega}(S/\mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{IM}$$

La vitesse de tous les points liés au plan Π_s est la mêmes que dans une rotation $\vec{\omega}$ autour du point *I*. $\overrightarrow{IM} \perp$ plan $(\vec{\omega}, \vec{V}(M/\mathfrak{R}))$. Vue que $\overrightarrow{IM} \perp \vec{V}(M/\mathfrak{R}))$, le CIR est situé, à un instant donné, sur les normales aux trajectoires dans le plan fixe des points liés au plan mobile.

2-2- Exemples

2-2-1 Mouvement plan d'un cylindre qui roule sans glisser sur le sol

Le mouvement se ramène à celui d'un disque en contact ponctuel avec la droite *Ox* d'un repère fixe $\mathfrak{R}(0,x,y,z)$. la vitesse de glissement est :

$\vec{V}_g = \vec{V}(I \in \Pi_S/\mathfrak{R}) - \vec{V}(I \in Ox/\mathfrak{R})$.

Or $\vec{V}(I \in Ox/\mathfrak{R}) = 0$, ce qui conduit dans le cas de roulement sans glissement à $\vec{V}(I \in \Pi_S/\mathfrak{R}) = 0$.

Donc le point *I* est le CIR.

On peut déterminer la position du CIR analytiquement :

$$\vec{O'I} = \frac{\vec{\omega}(\Pi_S/\mathfrak{R}) \wedge \vec{V}(O'/\mathfrak{R})}{\vec{\omega}^2}$$

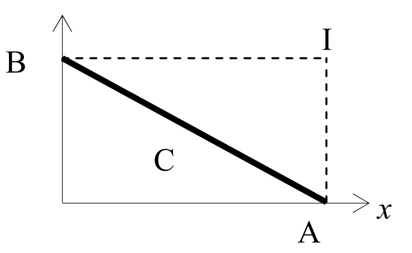
$$= \frac{\dot{\theta}\vec{k} \wedge \dot{x}\vec{i}}{\dot{\theta}^2} = \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}}\vec{j}$$

Or $\vec{V}_g = \vec{V}(I \in \Pi_S/\mathfrak{R}) = \vec{V}(O'/\mathfrak{R}) + \vec{\omega}(S/\mathfrak{R}) \wedge \vec{O'I} = (\dot{x} + r\,\dot{\theta})\,\vec{i}$.

La condition de roulement sans glissement implique : $\dot{x} = -r\,\dot{\theta}$, d'où on obtient $\vec{O'I} = -r\,\vec{j}$.



2-2-2 Barre contre un mur



Considérons une barre AB de longueur ℓ et de centre C en contact par ces extrémités A et B avec deux plans perpendiculaires *Ox* et *Oy*.

Les points A et B décrivent respectivement les axes *Ox* et *Oy* :

$\vec{V}(A/\mathfrak{R}) = \vec{\omega}((AB)/\mathfrak{R}) \wedge \vec{IA}$ $\qquad$ $\vec{V}(B/\mathfrak{R}) = \vec{\omega}((AB)/\mathfrak{R}) \wedge \vec{IB}$

Puisque $\vec{V}(A)$ et $\vec{V}(B)$ sont portées respectivement par les axes *Ox* et *Oy*, il en résulte que le CIR, *I*, se trouve sur la normale en A à *Ox* et la normale en B à *Oy*. Il est l'intersection des demi-droites A*y* et B*x*.

VI- Paramétrage d'un solide- Liaisons

1- Paramètres primitifs d'un solide

La position d'un solide en mouvement dans l'espace se défini généralement au moyen de 6 paramètres : 3 paramètres de translation qui sont les coordonnées (x,y,z) d'un point quelconque du solide qui est généralement son centre d'inertie et 3 paramètres de rotation qui sont les angles d'Euler (ψ,θ,φ). Ce sont les paramètres primitifs du solide.

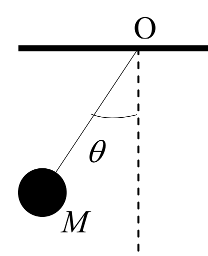
Cependant certains de ces paramètres peuvent être liés ou plus qui dérivent de certaines conditions particulières tel que le roulement sans glissement et les liaisons. On appèle degré de liberté, le nombre de paramètres primitifs indépendants.

2- Liaisons

2-1 Définitions

Les solides ne sont généralement pas libres dans l'espace. Leurs mouvements sont nécessairement limités par les propriétés de la matière : impénétrabilité, obstacles extérieurs, état des surfaces de contact,…etc.
Les liaisons sont les relations existantes entre les paramètres primitifs, leurs dérivées et le temps, pour traduire ces limitations. Ce sont des équations du genre $f(\{q_i\}, \{\overset{\circ}{q}_i\}, t) = 0$, où les q_i sont les paramètres primitifs du solide.
Pour classer les liaisons, on distingue :
i- Liaisons bilatérales et liaisons unilatérales
Une liaison bilatérale se traduit par des équations alors qu'une liaison unilatérale introduit au moins une inéquation.
ii- Liaisons holonomes et liaisons non holonomes
Une liaison holonome est une liaison qui se traduit par des relations entre les paramètres, et éventuellement le temps, mais à l'exclusion de leurs dérivées : $f(\{q_i\}, t) = 0$.
Une liaison dite nonholonome dans le cas contraire. Une liaison est semi holonome si les dérivées des paramètres interviennent linéairement.
iii- Liaison dépendante du temps et liaison indépendante du temps
Une liaison est dite indépendante du temps lorsque celui ci n'intervient pas explicitement et dépendante du temps dans le cas contraire.

2-2 Exemple



i- Pendule simple
Le système possède 3 paramètres $OM(x,y,z)$ qui sont liés par $OM^2 = \ell^2$.



La liaison est holonome. Elle est bilatérale si le support est inextensible et indépendante du temps si le point O est fixe.
ii- Solide en rotation autour d'un axe
Les mouvements du solides sont limités à la seule rotation autour de l'axe. En fixant deux points de l'axe on obtient 5 équations entre les paramètres primitifs. Il reste un paramètre libre. Le système possède donc un degré de liberté, l'angle ψ par exemple.
iii- Solide en rotation autour d'un point
Dans ce cas, seul un point est fixé (3 relations). Il reste 3 degrés de libertés ψ, θ, φ angles d'Euler.

ChapIII
Cinétique du solide

La cinétique du solide est l'étude de la dynamique des masses pesantes. Afin d'exprimer les concepts cinétiques qui apparaissent dans les lois de la dynamique et qui relient d'une part les éléments cinétiques, quantité de mouvement, moment cinétique et moment dynamique et d'autre part, les forces et les moments qui s'exercent sur les systèmes la cinétique introduit certaines grandeurs d'inertie : Masse d'inertie, centre d'inertie et moment d'inertie.

I- Eléments d'inertie

1- Masse

Dans l'étude dynamique d'un système matériel, on lui associe un nombre positif reél qu'on appèle sa masse inerte, possédant les propriétés suivantes :

- i- La masse est une grandeur extensive (additive) ; $M=\sum_i m_i$
- ii- En mécanique classique la masse est indépendante du temps.

La masse d'un système S fini de points matériel est la somme des masses m_i de chaque point $P_i \in S$: $M=\sum_i m_i$.

Pour un système continue, si dm est la masse associé à un élément du système matériel dE alors la masse est définie par $m=\int_E \rho \, dE$.

- Si E est un volume (distribution volumique) :
  ρ est la densité volumique du système et $dE \equiv dV$ est l'élément de volume.
- Si E est une surface (distribution surfacique) :
  $\rho \equiv \sigma$ est la densité surfacique du système $dE \equiv dS$ est l'élément de surface.
- Si E est une courbe (distribution linéaire) :
  $\rho \equiv \lambda$ est la densité linéaire du système et $dE \equiv d\ell$ est l'élément de longueur.

2- Centre d'inertie

2-1 Définition

On appèle centre de masse d'un système matériel S, le barycentre des différents points de S affectés de leurs masses respectives. Ainsi, pour un système de N points matériel le centre de masse est le point G défini par :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GP_i}=0$$

où le point O est une origine quelconque et M est la masse totale du système, $M=\sum_i m_i$.

Si la distribution de masse est continue on a :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{M}\int_{P\in S} dm\,\overrightarrow{OP} \quad \text{ou} \quad \int_{P\in S} dm\,\overrightarrow{GP}=0$$

Il y a 3 types de distribution de masse :

- i- Distribution volumique : $dm = \rho\, dV$
- ii- Distribution surfacique : $dm = \sigma\, dS$
- iii- Distribution linéique : $dm = \lambda$ dl.

2-2 Propriétés

2-2-1- Associativité

Soit une partition d'un système S en n ensembles disjoints S_k de masse m_k et de centre d'inertie G_k. Si G est le centre d'inertie de S on a :

$$\int_{P\in S} dm\,\vec{GP}=0 \qquad \text{et} \qquad m_k\vec{GG_k}=\int_{P\in S_k} dm_k\,\vec{GP}$$

Or $\int_{P\in S} dm\,\vec{GP}=\sum_k \int_{P\in S_k} dm_k\,\vec{GG_k}+\sum_k \int_{P\in S_k} dm_k\,\vec{G_kP}$

$$=\sum_k m_k\vec{GG_k}$$

d'où $\sum_k m_k\vec{GG_k}=0$.

Donc G est le centre d'inertie des points G_k affectés des masses respectives m_k :

$$M\vec{OG}=\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{OG_k} \qquad ; \qquad M=\sum_{k=1}^{n} m_k$$

Si un système matériel est une somme de systèmes matériels simples, cette propriété permet de concentrer la masse de ces parties en leurs propres centres de masse puis de déterminer le centre de masse de l'ensemble.

2-2-2- Symétries matérielles

1- Définition

On dit qu'un système (S) possède un élément de symétrie matérielle (point, droite, plan) si la distribution de masse en tout point P est gale à celle en P' point symétrique de P par rapport à cet élément de symétrie : $\rho(P)=\rho(P')$.

Exemples :

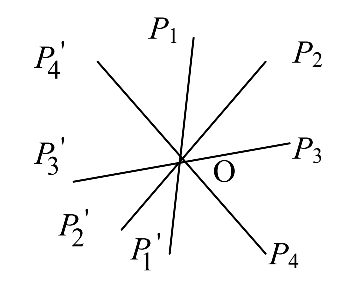
i- La boule $\mathbb{B}(O,R)$ admet O comme point de symétrie matériel

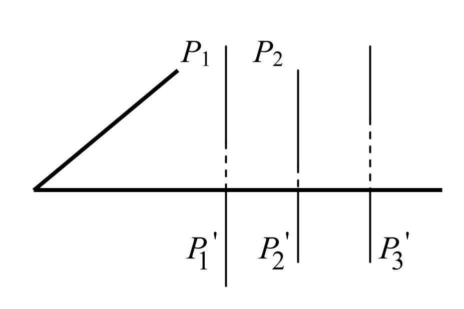
ii- La ½ boule d'axe Oz et le cône d'axe Oz admettent tous deux l'axe Oz comme axe de symétrie matérielle. C'est un axe de symétrie de révolution.

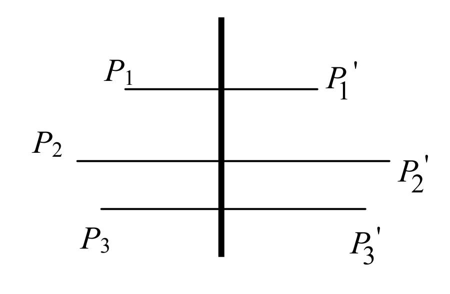
2- Propriétés

i- Si Un système admet un point A comme point de symétrie matérielle, alors le centre d'inertie G coïncide avec A. Exemple la boule $\mathbb{B}(O,R)$, une tige homogène,…etc

ii- Si un système admet un axe de symétrie matérielle Δ, alors le centre d'inertie $G\in\Delta$. Exemple ½ boule, cône,..etc







iii- Si un système admet un plan de symétrie matérielle Π alors le centre d'inertie $G \in \Pi$.
Exemple (½ boule $\cup$ cône).

En résumé, si un système possède un élément de symétrie matérielle ce dernier contient le centre d'inertie.

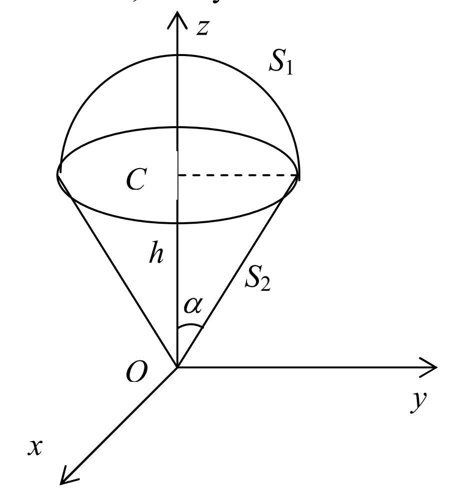
2-2-3- Détermination pratique du centre de masse

1- Règles à suivre

- i- Rechercher les éléments de symétrie car ils contiennent le centre de masse.
- ii- Décomposer le système si c'est possible en parties disjoints simples et d'en chercher la masse et le centre d'inertie partiel.
- iii- Utiliser les formules générales tout en employant les axes de projection les plus commodes.
- iv- Utiliser si c'est possible les méthodes auxiliaires (théorème de Guldin , coordonnées polaires, projections,…)

2- Exemple de calcul d'un centre de masse

Considérons un système constitué d'un cône plein $\mathcal{C}(C,R)$ de hauteur h, de rayon à la base R et d'une ½ sphère pleine $\mathbb{B}(C,R)$ de centre C et de rayon R.



Le système possède l'axe Oz comme axe de symétrie de révolution. Alors le centre d'inertie se trouve sur l'axe Oz : $\vec{OG} = z_G \vec{z}$

On décompose le système en deux parties simples

$S = S_1 \cup S_2$ avec $S_1 \equiv \mathbb{B}(C,R)$ et $S_2 \equiv \mathcal{C}(C,R)$

- Calcule de centre de masse de S_1.

L'équation de la ½ boule $\mathbb{B}(C,R)$ est :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-h)^2 \le R^2 \\ z \ge h \end{cases}$$

$$m_1 \vec{OG_1} = \rho \int_{S_1} \vec{OP}\, dV_1$$

Or $\rho = \dfrac{m_1}{V_1} = \dfrac{m_1}{2/3\,\pi R^3}$ et $dV_1 = 2\pi\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$

En posant $z' = z\text{-}h = r\cos\theta$, on obtient

$$z_{G_1} = \frac{3}{2\pi R^3} \int_{S_1} (z'+h)\, dV_1$$

$$= \frac{3}{R^3} \left[\int_0^R r^2\, dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta\, d\theta + h \frac{R^3}{3} \right]$$

$$z_{G_1} = \frac{3}{8} R + h$$

- Calcul du centre de masse du cône $\mathcal{C}(C,R)$

L'équation du cône est

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le r^2 \\ z \le h \end{cases} \qquad \text{avec } \tan g\,\alpha = \frac{R}{h} = \frac{r}{z}$$

$$m_2 \overrightarrow{OG_2} = \rho \int_{S_2} \overrightarrow{OP}\, dV_2$$

avec $dV_2 = \pi\, r^2\, dz$.

On obtient $V_2 = \pi \dfrac{R^2}{h^2} \displaystyle\int_0^h z^2\, dz = \frac{\pi}{3} h\, R^2$

$$z_{G_2} = \frac{\pi\, R^2}{V_2\, h^2} \int_0^h z^3\, dz \qquad \Rightarrow \qquad z_{G_2} = \frac{3}{4} h$$

Le centre de masse du système total S est obtenu à partir de l'équation

$$(m_1 + m_2)\, \overrightarrow{OG} = m_1\, \overrightarrow{OG_1} + m_2 \overrightarrow{OG_2}$$

$$(m_1 + m_2)\, z_G = m_1 (\tfrac{3}{8} R + h) + m_2 \frac{3h}{4}$$

vue que $\rho = \dfrac{m_1}{V_1} = \dfrac{m_2}{V_2} = \dfrac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}$

on obtient $(1 + \dfrac{V_2}{V_1})\, z_G = \dfrac{3}{8} R + h + \dfrac{V_2}{V_1} \dfrac{3h}{4}$

$$z_G = \frac{3/4(R^2 + h^2) + 2Rh}{2R + h}$$

3- Moments d'inertie

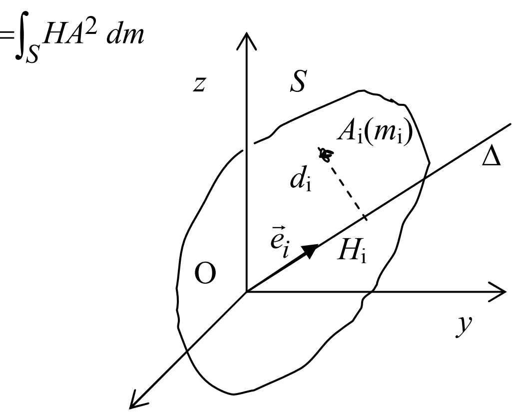
3-1 Moment d'inertie par rapport à un axe

On appèle moment d'inertie d'un système *S* par rapport à un axe Δ, la quantité positive :

Système discret	Système continu
$I_\Delta = \sum_i m_i\ (H_i\, A_i)^2$	$I_\Delta = \int_S HA^2\, dm$

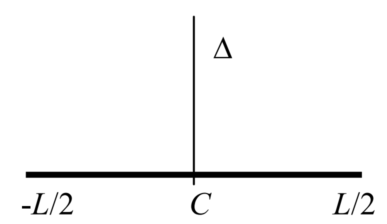
ou $(H_i\, A_i)^2$ est le carré de la distance du point A_i de masse m_i à l'axe Δ.

Si $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, $I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} I_\Delta(S_i)$.



Exemple : Moment d'inertie d'une tige homogène, de masse *m* et de longueur *L*, par rapport à un axe Δ perpendiculaire passant par son centre.

$$I_\Delta=\int_{(T)} CA^2\, dm = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} \ell^2\, d\ell = \lambda \frac{L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}$$



3-2- *Opérateur d'inertie et matrice d'inertie*

Le moment d'inertie d'un système S par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$ passant par le point O origine du repère $\Re(O,x,y,z)$ est :

$$I_\Delta=\int_S \overrightarrow{HA}^2\, dm = \int_S (\overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OH}^2)\, dm$$

$$= \vec{e}_\Delta . \int_S \overrightarrow{OA}^2\, \vec{e}_\Delta\, dm - \int_S (\overrightarrow{OA}.\vec{e}_\Delta)^2\, dm$$

$$= \vec{e}_\Delta . \left[\int_S \overrightarrow{OA}^2\, \vec{e}_\Delta\, dm - \int_S (\overrightarrow{OA}.\vec{e}_\Delta)\, \overrightarrow{OA}\, dm \right]$$

$$= \vec{e}_\Delta . \int_S \overrightarrow{OA} \wedge (\vec{e}_\Delta \wedge \overrightarrow{OA})\, dm$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$I_\Delta = \vec{e}_\Delta . \Im(O,S)\, \vec{e}_\Delta$$

où $\Im(O,S)$ est l'opérateur (tenseur) d'inertie en O du solide S qui agit sur le vecteur $\vec{e}_\Delta$.

3-2-1 Définition

Soit C un point de l'espace affine $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$. L'opérateur d'inertie en C du solide S est l'opérateur $\Im(C,S)$ défini par :

$$\Im(C,S)\, \vec{u} = \int_{P\in S} \overrightarrow{CP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{CP})\, dm$$

3-2-2- Propriétés

i- Si $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, alors $\Im(C,S) = \sum_{i=1}^{n} \Im(C,S_i)$

ii- L'application $\vec{u} \rightarrow \Im(C,S)\vec{u}$ est une application linéaire

$$\Im(C,S)(\alpha\, \vec{u} + \beta\, \vec{v}) = \alpha\, \Im(C,S)\vec{u} + \beta\, \Im(C,S)\vec{v}$$

iii- $\Im(C,S)$ est un opérateur symétrique

$$\vec{v}\Im(C,S)\vec{u} = \int_S \vec{v}.(\overrightarrow{CP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{CP})\, dm$$

$$= \int_S (\vec{v} \wedge \overrightarrow{CP}).\, (\vec{u} \wedge \overrightarrow{CP})\, dm$$

$$= \int_S \vec{u}.(\overrightarrow{CP} \wedge (\vec{v} \wedge \overrightarrow{CP})\, dm$$

$$= \vec{u}\Im(C,S)\vec{v}$$

3-3 Matrice d'inertie

Etant symétrique et linéaire, l'opérateur d'inertie $\Im(O,S)$ peut être représenté par une matrice d'ordre 3 symétrique, $I(O,S)$ dans une base orthonormée $\{\vec{e}_i\}$.

Dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associée au repère $\Re(O,x,y,z)$, les éléments de la matrice $I(O,S)$ sont donnés par :

$$I_{ij}(O,S) = \vec{e}_i . \Im(O,S)\vec{e}_j$$

que nous pouvons expliciter sous la forme :

$$I_{ij} = \vec{e}_i . \int_S \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{e}_j \wedge \overrightarrow{OP})\, dm$$

$$I_{ij} = \int_S (\overrightarrow{OP}^2\, \vec{e}_i . \vec{e}_j - (\overrightarrow{OP}.\vec{e}_i)(\overrightarrow{OP}.\vec{e}_j))\, dm$$

Les éléments diagonaux sont appelés moments d'inertie par rapport aux axes Ox, Oy et Oz, ils sont donnée respectivement par :

$$I_{xx} = \int_S (\overrightarrow{OP}^2 - (\overrightarrow{OP}.\vec{e}_x)(\overrightarrow{OP}.\vec{e}_x))\, dm = \int_S (y^2 + z^2)\, dm = A$$

$$I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2)\, dm = B \quad , \quad I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2)\, dm = C$$

Les produits d'inertie sont les éléments non diagonaux :

$$I_{xy} = \int_S (\overrightarrow{OP}(\vec{e}_x.\vec{e}_y) - (\overrightarrow{OP}.\vec{e}_x)(\overrightarrow{OP}.\vec{e}_y))\, dm = -\int_S xy\, dm = -F$$

$$I_{xz} = -\int_S xz\, dm = -E \quad , \quad I_{yz} = -\int_S yz\, dm = -D$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}$ est obtenu à partir de la matrice d'inertie $I(O,S)$ par : $I_\Delta = \vec{u}\, I(O,S)\, \vec{u}$

Elle s'écrit explicitement

$$I_\Delta = (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2\beta\gamma D - 2\alpha\gamma E - 2\beta\alpha F$$

Remarques :

i- Les moments d'inerties A, B et C sont positifs ou nuls et les produits d'inerties D, E et F peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

ii- On défini les moments d'inertie planaires ,càd par rapport à un plan par :

$$I_{yOz} = \int_S x^2\, dm, \qquad I_{xOz} = \int_S y^2\, dm, \qquad I_{yOx} = \int_S z^2\, dm$$

et par suite on peut écrire

$$I_{xx} = I_{xOz} + I_{xOy}, \qquad I_{yy} = I_{yOz} + I_{xOy}, \qquad I_{zz} = I_{xOz} + I_{zOy}$$

iii- Le moment d'inertie par rapport à un point O est défini par :

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})$$

On remarque que $2I_O = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = Tr\, I(O,S)$ est un invariant de la matrice d'inertie.

3-4 Axes principaux d'inertie

La matrice d'inertie $I(O,S)$ étant réelle et symétrique ; donc elle est diagonalisable. Soit la base orthonormée où $\{\vec{u}_i\}$ l'opérateur d'inertie $\Im(O,S)$ prend une forme diagonale $J(O,S) = P^{-1} I(O,S) P$

$$J(O,S) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres $\vec{u}_i$ et P la matrice de passage de la base $\{\vec{e}_i\}$ à la nouvelle base $\{\vec{u}_i\}$ dite aussi base principale d'inertie.

$J(O,S)$ est appelée matrice principale d'inertie. Les axes Ou_i sont le axes principaux alors que les valeurs propres λ_i sont les moments d'inertie correspondants.

Remarques :

i- Si deux des valeurs propres sont égaux , $\lambda_1 = \lambda_2$, l'opérateur $J(O,S) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ est de révolution ou cylindrique. Tout axe Ou avec $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2$ est aussi un axe principal d'inertie de moment d'inertie λ.

ii- Si les trois moments d'inerties sont égaux, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, alors l'opérateur d'inertie $J(O,S)$ est dit sphérique et tout axe Ou avec $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3$ est aussi axe principal d'inertie de moment d'inertie λ.

3-5- *Détermination des axes principaux d'inertie*

La détermination direct de la matrice d'inertie $I(O,S)$ nécessite le calcul de 6 éléments. Cependant le choix d'une base principale d'inertie permet de ramener le calcul à 3 éléments seulement.

3-5-1- Symétries matérielles et axes principaux

Considérons un solide S auquel est lié un repère orthonormé direct $\Re_S(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

i- Si la droite $(A, \vec{w})$ est un axe de symétrie matérielle de S alors est un vecteur propre de I(C,S) $\forall\ C \in$ l'axe $(A, \vec{w})$. En effet :

$$I(C,S)\, \vec{w} = \begin{pmatrix} -E \\ -D \\ C \end{pmatrix}, \text{ or } E = -\int_S xz\, dm = 0 \text{ et } D = -\int_S yz\, dm = 0 .$$

Donc $I(C,S)\, \vec{w} = C\, \vec{w} = I_{zz}\, \vec{w}$ et la matrice d'inertie devient :

$$I(C,S) = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})} \quad \forall\ C \in \text{l'axe } (A, \vec{w}).$$

Si de plus l'axe $(A,\vec{w})$ est de symétrie de révolution, alors $A = B$. Exemple le cône de révolution par rapport à l'axe Oz.
Ainsi *tout axe de symétrie matérielle est axe principal d'inertie*.

ii- Si le plan $\Pi \equiv (A,\vec{u},\vec{v})$ est un plan de symétrie matérielle pour S, alors tout vecteur perpendiculaire à Π ($\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$) est un vecteur propre de $I(C,S)$ $\forall$ $C \in \Pi$. Alors $D = E = 0$. *Ainsi tout axe perpendiculaire à un plan de symétrie matérielle est axe principal d'inertie.*

3-5-2 Conséquences

i- Tout trièdre tri-rectangle dont deux de ses axes sont axes de symétrie matérielle pour un système S, est un trièdre principal d'inertie de ce système.
En effet : Soient $(A,\vec{u})$ et $(A,\vec{v})$ axes de symétrie matérielles alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs propres de $I(A,S)$. En conséquences $E = F = 0$ et $D = F = 0$. Alors $I(A,S)$ est diagonale et donc $\vec{w}$ est vecteur propre de $I(A,S)$.

ii- Tout trièdre tri-rectangle dont deux de ses plans sont de symétrie matérielle pour un système S, est un trièdre principal d'inertie de ce système.
En effet : Soient $(A,\vec{u},\vec{v})$ et $(A,\vec{u},\vec{w})$ deux plans de symétrie matérielles pour S. $\vec{w} \perp (A,\vec{u},\vec{v})$ et $\vec{v} \perp (A,\vec{u},\vec{v})$ sont des vecteurs propres de $I(A,S)$, alors $E = D = 0$ et $F = D = 0$. En conséquence $\vec{u}$ est aussi un vecteur propre de $I(A,S)$.

II- Théorèmes associés au calcul de la matrice d'inertie *I*(*O*,*S*)

1- Théorème I de Koenig

La matrice d'inertie d'un solide S en un point O est égal à la somme de la matrice d'inertie en G du solide et la matrice d'inertie en O du centre de masse G affecté de la masse totale du solide S.

$$I(O,S) = I(G,S) + I(O,G\{m\})$$

Soit G le centre de masse d'un système S de masse m. L'opérateur d'inertie $\Im(O,S)$ est tel que :

$$\Im(O,S)\,\vec{u} = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP})\, dm$$

En décomposant $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$, on obtient

$$\Im(O,S)\,\vec{u} = \int_{P\in S} \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})\, dm + \int_{P\in S} \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP})\, dm + \int_{P\in S} \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})\, dm$$

$$+ \int_{P\in S} \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP})\, dm$$

Vue que $\int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\, dm = 0$, les deux termes du milieu sont nuls. On obtient alors :

$$\Im(O,S)\,\vec{u} = m\,\overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}) + \Im(G,S)\,\vec{u}$$

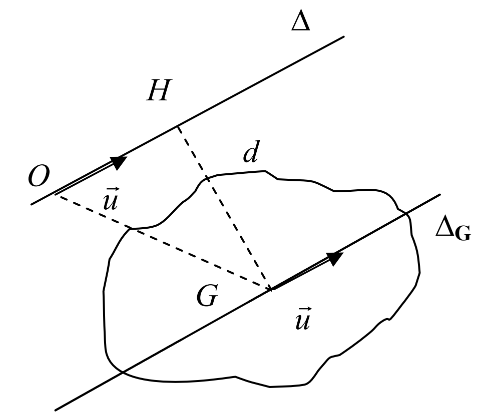
$$\Im(O,S)\,\vec{u} = \Im(O,G\{m\})\,\vec{u} + \Im(G,S)\,\vec{u}$$

D'où la démonstration du théorème

2- Théorème de Hygens

Le moment d'inertie d'un solide S par rapport à une droite Δ est égale au moment d'inertie du solide par rapport à la droite Δ_G passant par G et parallèle à Δ augmenté du moment d'inertie qu'aurait toute la masse de S si elle était concentrée en G.

$$I_{\Delta}(O,S) = I_{\Delta_G}(G,S) + m\,d^2$$



$d^2 = //\overrightarrow{GH}//^2$ avec H la projection perpendiculaire de G sur Δ.

Soit $\vec{u}$ est le vecteur unitaire associé à Δ.

$$I_{\Delta}(O,S) = \vec{u}.\Im(O,S)\,\vec{u}$$

$$= m\,\vec{u}.[\overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})] + \vec{u}.\Im(G,S)\,\vec{u}$$

$$= m\,[\overrightarrow{OG}^2 - (\overrightarrow{OG}.\vec{u})^2] + I_{\Delta_G}(G,S)$$

Or $\overrightarrow{OG}^2 - (\overrightarrow{OG}.\vec{u})^2 = \overrightarrow{OG}^2 - \overrightarrow{OH}^2 = d^2$

D'où la démonstration du théorème.

3- Détermination pratique de la matrice d'inertie

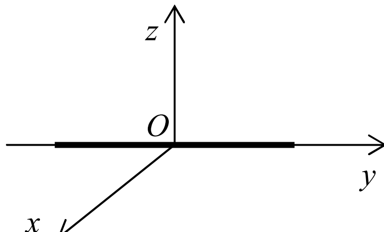
1-3- Règles générales

- Mettre en évidence les symétries.
- Décomposer le système en des éléments simples et étudier séparément chaque partie.
- Choisir un point O commode et des axes susceptibles de simplifier les calculs (axes principaux).
- Calculer les composantes de la matrice d'inertie.
- Le calcul du moment d'inertie par rapport à un axe Δ passant par O s 'effectue selon $I_{\Delta}(O,S) = \vec{u}.I(O,S)\,\vec{u}$
- Le calcul du moment d'inertie par rapport à un axe Δ' s'effectue à partir du théorème d'Hygens : $I_{\Delta'}(O,S) = I_{\Delta_G}(G,S) + m\,d^2$



2-3- Exemples

1-2-3- *Tige rectiligne homogène*



Soit T une tige homogène de longueur ℓ et de masse m.
Les axes Ox et Oz sont des axes de symétrie matérielle.
Donc $\Re(O,x,y,z)$ est un trièdre principal.

$$I(O,T) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$A = I_{xx} = \int_T (z^2+y^2)\,dm = \lambda \int_T (z^2+y^2)\,dy$$

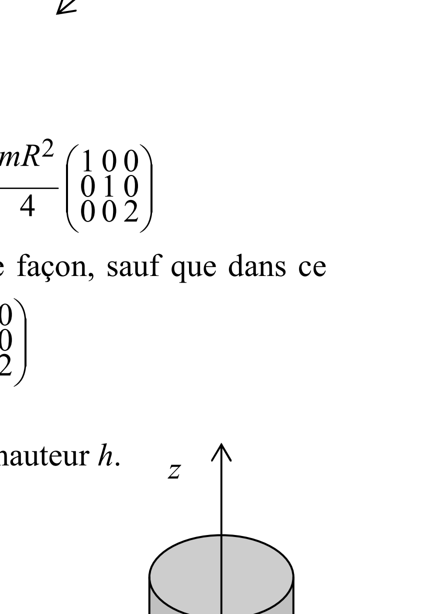
$$= \lambda \int_{-\ell/2}^{\ell/2} y^2\,dy = \lambda \frac{\ell^3}{12} = m\frac{\ell^2}{12}$$

$$I(O,T) = m\frac{\ell^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de même on obtient $C = I_{zz} = m\frac{\ell^2}{12}$

2-2-3 *Disque plein homogène*

Soit un disque $\mathcal{D}(O,R)$ dans le plan xOy. Ox et Oy sont des axes de symétrie matérielle. Donc $\Re(O,x,y,z)$ est principal. Oz étant un axe de symétrie de révolution, alors $A = I_{xx} = B = I_{yy}$. $C = I_{zz}$



$$I(O,D)=\begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{pmatrix}, \text{ avec } I_{xx}=\sigma\int_D y^2\, ds \ , \ I_{yy}=\sigma\int_D x^2\, ds .$$

$$I_{zz}=\sigma\int_D (x^2+y^2)\, ds = I_{xx}+I_{yy}=2I_{xx}=2I_{yy}$$

$$I_{zz}=\sigma\int_D r^2 r dr d\theta=\sigma\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{m}{\pi R^2}2\pi\frac{R^4}{4}=m\frac{R^2}{2} \ ; \qquad I(O,D)=\frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice d'inertie d'un cerceau s'obtient de la même façon, sauf que dans ce cas $x^2+y^2=R^2$, d'où $I_{zz}=\int_C (x^2+y^2)dm = mR^2$. $I(O,C)=\frac{mR^2}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

3-2-3 *Cylindre plein homogène*

Soit un cylindre $\mathbb{C}$ plein homogène de de masse m , de rayon R et de hauteur h. $\Re(O,x,y,z)$ est principal(deux plans de symétrie matérielle). De plus l'axe Oz est un axe de symétrie de révolution.

$$I(O,C)=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{pmatrix}, \text{ avec } A = I_{xx} = B = I_{yy}.\ C=I_{zz}$$

$$I_{xx}=\rho\int_C (y^2+z^2)\, dV = I_{yy}=\rho\int_C (x^2+z^2)\, dV$$

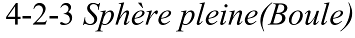
$$I_{zz}=\rho\int_C (x^2+y^2)\, dV$$

$$I_{zz}=\rho\int_C r^2 r dr d\theta dz=\rho\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_{-h/2}^{h/2} dz=\frac{m}{\pi h R^2}2\pi\frac{R^4}{4}h=m\frac{R^2}{2}.$$

On remarque que $2A = I_{zz} + 2\rho\int_C z^2 dV$

$$\text{Or } \rho\int_C z^2 dV=\frac{m}{\pi h R^2}\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz=\frac{mh^2}{12}$$

On obtient finalement $A=\frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12}$; $\quad I(O,C)=\begin{pmatrix}\frac{m}{12}(h^2+3R^2)&0&0\\0&\frac{m}{12}(h^2+3R^2)&0\\0&0&\frac{mR^2}{2}\end{pmatrix}$



4-2-3 *Sphère pleine(Boule)*

Soit une sphère $S(O,R)$ pleine homogène de masse m et de rayon R. $\Re(O,x,y,z)$ est principal. En plus on a une symétrie sphérique, ce qui conduit à $A = B = C$.

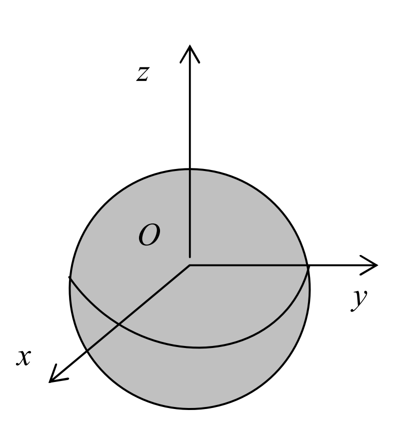
$$I(O,S)=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

$$A=\rho\int_S (y^2+z^2)\, dV=\rho\int_S (x^2+z^2)\, dV=\rho\int_S (x^2+y^2)\, dV$$

$$3A=2\rho\int_S (x^2+y^2+z^2)\, dV=\frac{2m}{4/3\,\pi R^3}\int_S r^2 r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$$

$$A=\frac{2m}{4\pi R^3}\int_0^R r^4 dr\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{2}{5}mR^2$$

$$I(O,S)=\frac{2}{5}mR^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

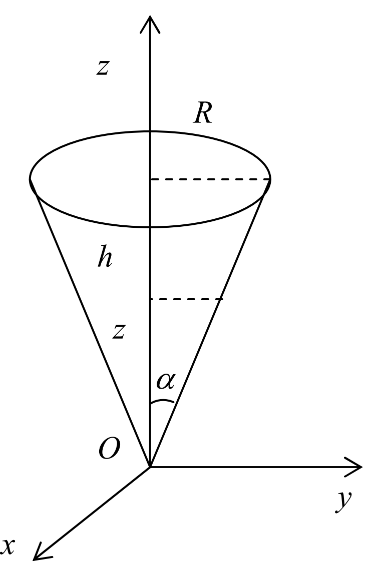


Remarque : Dans le cas d'une sphère creuse on a :

$x^2+y^2+z^2=R^2$, d'où $3A=2mR^2$, $\quad I(O,S)=\frac{2}{3}mR^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5-2-3 *Cône homogène plein*

On considère un cône homogène plein de masse *m*, de hauteur *h* et de rayon à la base *R*
Les plan *xOy* et *yOz* sont des plans de symétrie matérielle.
$\Re(O,x,y,z)$ est donc principal. L'axe Oz est un axe de symétrie de révolution, alors *A=B*.



$$I(O,C)=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

L'équation du cône est $\begin{cases} x^2+y^2\le R^2 \\ z\le h \end{cases}$

$$A=I_{xx}=\rho\int_C (y^2+z^2)dV=I_{yy}=\rho\int_C (y^2+z^2)dV\,,\quad C=\int (x^2+y^2)dV$$

Or $2A=C+2\rho\int_C z^2 dV$

$$V=\int_C dV=\int_0^h dz\int_0^{zR/h} r dr\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{1}{3}\pi hR^2$$

$$C=\rho\int_C r^2 r\, dr d\theta dz=2\pi\rho\int_0^h dz\int_0^{zR/h} r^3 dr=\frac{\pi}{10}\rho hR^4$$

$$C=\frac{3}{10}mR^2$$

$$\rho\int_C z^2 dV=2\pi\rho\int_0^h z^2 dz\int_0^{zR/h} r dr=\frac{\pi}{5}\rho R^2 h^3=\frac{3}{5}mh^2$$

$A=\frac{3m}{20}(4h^2+R^2)$, $\quad I(O,C)=\begin{pmatrix} \frac{3m}{20}(4h^2+R^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3m}{20}(4h^2+R^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mR^2}{10} \end{pmatrix}$

III- Torseur cinétique

1- Définition

Soit S un système de points matériels en mouvement dans l'espace affine $\mathcal{E}$ par rapport à un repère fixe $\Re(O,x,y,z)$.

Le torseur cinétique de S/ℜ noté $\tau_c(S/\Re)$ est le torseur ayant pour résultante l'impulsion totale de S/ℜ, $\vec{P}(S/\Re)$ et pour moment, le moment cinétique total de S/ℜ, $\vec{\sigma}(S/\Re)$. Ils sont définis par :

$$\begin{cases} \vec{P}(S/\Re)=\sum_{i=1}^{N} m_i\ \vec{V}(M_i \in S/\Re) \\ \vec{\sigma}(C,S/\Re)=\sum_{i=1}^{N} m_i\ \overrightarrow{CM}_i \wedge \vec{V}(M_i \in S/\Re) \end{cases}$$

Cas d'un système discret

$$\begin{cases} \vec{P}(S/\Re)=\int_S \vec{V}(M\in S/\Re)\, dm \\ \vec{\sigma}(C,S/\Re)=\int_S \overrightarrow{CM}\wedge \vec{V}(M\in S/\Re)\, dm \end{cases}$$

Cas d'un système continu

Remarques

i- $\vec{\sigma}(C,S/\Re)$ dépend du point où on le calcul alors que $\vec{P}(S/\Re)$ ne dépend que du repère ℜ.

ii- Souvent on prend $C\equiv O$ (origine du repère ℜ) ou $C\equiv G$ (origine du repère $\Re_G$)

2- Propriétés

1- Si $S=\bigcup_{i=1}^{N} S_i$, alors $\tau_c(S/\Re)=\sum_{i=1}^{N}\tau_c(S_i/\Re)$

2- $\vec{P}(S/\Re)=\int_{M\in S}\vec{V}(M/\Re)\, dm=\int_{M\in S}\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}dm+\int_{M\in S}\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}dm=m\vec{V}(G/\Re)$.

$$\vec{P}(S/\Re)=m\vec{V}(G/\Re)$$

La quantité de mouvement du système est égale à la quantité de mouvement du centre d'inertie affecté de la masse totale du système. Dans le repère lié au centre de masse $\Re_G$ $\vec{P}(S/\Re_G)=0$

3- $\vec{\sigma}(O,S/\Re)$ est un champ antisymétrique.

$$\vec{\sigma}(O,S/\Re)=\int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}(M/\Re)\, dm=\int_{M\in S}\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}(M/\Re)\, dm+\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M/\Re)\, dm$$

$$\vec{\sigma}(O,S/\Re)=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{P}(S/\Re)+\vec{\sigma}(A,S/\Re)$$

4- Cas d'un solide

$$\vec{\sigma}(C,S/\Re) = \int_{M\in S} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}(M/\Re)\, dm = \int_{M\in S} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}(A/\Re)\, dm + \int_{M\in S} \overrightarrow{CM} \wedge (\vec{\omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AM})\, dm$$

$$= m\, \overrightarrow{CG} \wedge \vec{V}(A/\Re) + \int_{M\in S} \overrightarrow{CA} \wedge (\vec{\omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AM})\, dm + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AM})\, dm$$

$$\vec{\sigma}(C,S/\Re) = m\, \overrightarrow{CG} \wedge \vec{V}(A/\Re) + m\, \overrightarrow{CA} \wedge (\vec{\omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AG}) + \Im(A,S/\Re)\vec{\omega}(S/\Re)$$

<u>Cas particuliers</u>

i- $C \equiv A \in \Re_S$

$$\vec{\sigma}(A,S/\Re) = m\, \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/\Re) + \Im(A,S/\Re)\vec{\omega}(S/\Re)$$

ii- $C \equiv A \in \Re_S$ un point fixe dans $\Re$ (exemple l'origine O de $\Re$)

$$\vec{\sigma}(A,S/\Re) = \Im(A,S/\Re)\vec{\omega}(S/\Re)$$

iii- Si $C \equiv G$

$$\vec{\sigma}(G,S/\Re) = m\, \overrightarrow{AG} \wedge (\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\omega}(S/\Re)) + \Im(A,S/\Re)\vec{\omega}(S/\Re)$$

iv- Si $C \equiv G \equiv A$

$$\vec{\sigma}(G,S/\Re) = \Im(G,S/\Re)\vec{\omega}(S/\Re)$$

On note que $\Im(A,G\{m\})\vec{\omega}(S/\Re) = m\, \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{\omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AG})$ (Ce n'est autre que l'image de $\vec{\omega}(S/\Re)$ par l'opérateur d'inertie $\Im(A,G\{m\})$) et par conséquent

$$\vec{\sigma}(G,S/\Re) = m\, \overrightarrow{AG} \wedge (\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\omega}(S/\Re)) + \Im(A,S/\Re)\vec{\omega}(S/\Re) = (\Im(A,S/\Re) - \Im(A,G\{m\}))\vec{\omega}(S/\Re)$$

D'après le théorème I de Koenig on obtient $\vec{\sigma}(G,S/\Re) = \Im(G,S/\Re)\vec{\omega}(S/\Re)$. Alors les cas iii et iv sont équivalents.

v- Théorème II de Koenig

La propriété d'antisymétrie de $\vec{\sigma}$ permet de déduire le 2éme théorème de Koenig :

$$\vec{\sigma}(O,S/\Re) = \vec{\sigma}(G,S/\Re) + m\, \overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}(G/\Re)$$

On note que $\vec{\sigma}(G,S/\Re) = \vec{\sigma}(G,S/\Re_G) = \Im(G,S/\Re_G)\vec{\omega}(S/\Re)$

IV- Torseur dynamique

1- Définition

Soit S un système de points matériels en mouvement dans l'espace affine $\mathcal{E}$ par rapport à un repère fixe $\Re(O,x,y,z)$.

Le torseur dynamique de S/$\Re$ noté $\tau_D(S/\Re)$ est le torseur associé au champ des accélérations par rapport à $\Re$, des points de *S*. Les éléments de réduction en un point *C* quelconque sont la résultante dynamique $\vec{S}(S/\Re)$ et le moment dynamique $\vec{\delta}(S/\Re)$. Ils sont définis par :

$$\begin{cases} \vec{S}(S/\Re) = \sum_{i=1}^{N} m_i \ \vec{\gamma}\ (M_i \in S/\Re) \\ \vec{\delta}(C,S/\Re) = \sum_{i=1}^{N} m_i \ \overrightarrow{CM}_i \wedge \vec{\gamma}\ (M_i \in S/\Re) \end{cases}$$

Cas d'un système discret

$$\begin{cases} \vec{S}(S/\Re) = \int_S \vec{\gamma}\ (M \in S/\Re)\ dm \\ \vec{\delta}(C,S/\Re) = \int_S \overrightarrow{CM} \wedge \vec{\gamma}\ (M \in S/\Re)\ dm \end{cases}$$

Cas d'un système continu

2- Propriété

1- Si $S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$, alors $\tau_D(S/\Re) = \sum_{i=1}^{N} \tau_D(S_i/\Re)$

2- $\vec{S}(S/\Re) = \int_{M \in S} \frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt}\ dm = \frac{d}{dt} \int_{M \in S} \vec{V}(M/\Re)\ dm = m\,\frac{d\vec{V}(G/\Re)}{dt}$.

$$\vec{S}(S/\Re) = m\vec{\gamma}(G/\Re)$$

La résultante dynamique d'un système *S* est la résultante de son centre de masse affecté de la masse totale de *S*. Elle est aussi la dérivée dans $\Re$ de la résultante cinétique $\vec{P}(S/\Re)$.

3- Relation entre $\tau_c(S/\Re)$ et $\tau_D(S/\Re)$

$$\vec{\sigma}(C,S/\Re) = \int_S \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}(M \in S/\Re)\ dm$$

$$\frac{d\vec{\sigma}(C,S/\Re)}{dt} = -m\vec{V}(C/\Re) \wedge \vec{V}(G/\Re) + \int_S \overrightarrow{CM} \wedge \vec{\gamma}(M \in S/\Re)\ dm$$

$$\vec{\delta}(C,S/\Re) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(C,S/\Re)}{dt}\right)_{\Re} + m\vec{V}(C/\Re) \wedge \vec{V}(G/\Re)$$

4- $\vec{\delta}$ est un champ antisymétrique

$$\vec{\delta}(C,S/\Re) = \int_S \overrightarrow{CM} \wedge \vec{\gamma}\ (M \in S/\Re)\ dm = \int_S \overrightarrow{CA} \wedge \vec{\gamma}\ (M \in S/\Re)\ dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}\ (M \in S/\Re)\ dm$$

$$\vec{\delta}(C,S/\Re) = \vec{\delta}(A,S/\Re) + \overrightarrow{CA} \wedge m\vec{\gamma}(G/\Re)$$

5- Théorème III de Koenig

Si on pose $C \equiv G$ on obtient

$$\vec{\delta}(G,S/\Re) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/\Re)}{dt}\right)_{\Re}$$

On sait que $\vec{\sigma}(C,S/\Re) = \vec{\sigma}(G,S/\Re) + m\,\overrightarrow{CG} \wedge \vec{V}(G/\Re)$

$$\frac{d\vec{\sigma}(C,S/\Re)}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}(G,S/\Re)}{dt} + m\,\overrightarrow{CG} \wedge \vec{\gamma}(G/\Re) - m\vec{V}(C/\Re) \wedge \vec{V}(G/\Re)$$

d'où le théorème III de Koenig pour le moment dynamique qui s'énonce comme suit :

$$\vec{\delta}(C,S/\Re) = \vec{\delta}(G,S/\Re) + m\,\overrightarrow{CG} \wedge \vec{\gamma}(G/\Re) \qquad \forall\ C \in \mathcal{E}$$

Vue que $\vec{\sigma}(G,S/\Re) = \vec{\sigma}(G,S/\Re_G)$ le théorème s'écrit :

$$\vec{\delta}(C,S/\Re) = \vec{\delta}(G,S/\Re_G) + m\,\overrightarrow{CG} \wedge \vec{\gamma}(G/\Re)$$

6- Si $C \equiv O$ est un point fixe dans $\Re$ (exemple l'origine O de $\Re$)

$$\vec{\delta}(O,S/\Re) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(O,S/\Re)}{dt}\right|_{\Re}$$

Dans ce cas $\vec{V}(O/\Re) = 0$ et par conséquent $\tau_D(O,S/\Re) = \left.\dfrac{d\tau_c(O,S/\Re)}{dt}\right|_{\Re}$

V- Energie cinétique

1- Définition

L'énergie cinétique, à l'instant t, d'un système S de points matériels quelconque dans son mouvement par rapport à $\Re$ est le scalaire

$$T(S/\Re) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\ \vec{V}^2(M_i/\Re) \qquad\qquad T(S/\Re) = \int_{M \in S} \frac{1}{2}\vec{V}^2(M/\Re)\,dm$$

Système discret — système continu

2- Propriétés

1- Si $S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$, $T(S/\Re) = \sum_{i=1}^{N} T(S_i/\Re)$

2- $T(S/\Re)$ est le comoment du torseur cinématique τ_v et du torseur cinétique τ_c .

$$2T(S/\Re) = \int_{M \in S} \vec{V}^2(M/\Re)\,dm$$

$$= \int_{M \in S} \vec{V}(M/\Re).\vec{V}(A/\Re)\,dm + \int_{M \in S} \vec{V}(M/\Re).(\,\vec{\omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AM})\,dm$$

$$= m\vec{V}(G/\Re).\vec{V}(A/\Re) + \vec{\omega}(S/\Re).\int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\Re)\,dm$$

$$2T(S/\Re) = m\vec{V}(G/\Re).\vec{V}(A/\Re) + \vec{\omega}(S/\Re).\vec{\sigma}(A,S/\Re)$$

Ce qui permet d'écrire $2T(S/\Re) = (\,\tau_v(S/\Re), \tau_c(S/\Re))$.

3- Conséquences

1- Vue que l'énergie cinétique est le comoment du torseur τ_v et du torseur τ_c alors elle est indépendante du point où on la calcule.

2- Si $A \in S$ fixe dans $\Re$ alors : $2T(S/\Re) = \vec{\omega}(S/\Re).\vec{\sigma}(A,S/\Re)$.

Or $\vec{\sigma}(A,S/\Re) = \Im(A,S/\Re)\vec{\omega}(S/\Re)$, d'où :

$$T(S/\Re) = \vec{\omega}(S/\Re)\ \Im(A,S/\Re)\vec{\omega}(S/\Re)$$

3- Théorème VI de Koenig

Si on substitue A par G, le centre de masse du système, dans l'expression de $T(S/\Re)$ on obtient :

$$2T(S/\Re) = m\vec{V}^2(G/\Re) + \vec{\omega}(S/\Re).\Im(G,S/\Re)\vec{\omega}(S/\Re)$$

Enoncé du théorème :

L'énergie cinétique d'un système de points matériel S dans son mouvement par rapport à $\Re$ et égal à la somme de son énergie cinétique dans son mouvement autour de son centre de gravité et de l'énergie cinétique de son centre de masse affecté de la masse totale dans son mouvement par rapport à $\Re$.

ChapIV
Principe fondamental de la dynamique
Théorèmes généraux

La dynamique des systèmes matériels s'appuie sur le principe fondamental de la dynamique qui est une généralisation de la loi fondamentale de la mécanique du point matériel et des théorèmes relatifs aux mouvements des systèmes de N points aux systèmes quelconques. Il exprime donc la relation entre, d'une part, les éléments cinétiques quantité de mouvement et moment cinétique, et d'autre part, les forces et les moments qui s'exercent sur eux. Ainsi à partir de ce principe fondamental on peut prévoir les mouvements de tous les systèmes matériels sous l'action des forces qu'ils subissent.

I- Principe fondamental de la dynamique

1- Forces appliquées à un système : Torseur force.

1-1 Notion de force

On appelle force, toute effort exercé sur un point matériel $M \in S$. Elle est représentée par un 3- vecteur $\vec{F}(M)$.

Soit un système S de points matériel en mouvement par rapport à un référentiel $\Re$. L'un des points A_i est soumis à la force exercée par l'ensemble des autres points de S et par des corps extérieurs à S. Le système de forces appliquées à S est donc représenté par l'ensemble des vecteurs liés $\{(A_i \ , \vec{F}_i \ )\}$.

Si S est un système discret, l'effort total $\vec{F}$ exercé sur S dans $\Re$ est la somme des forces élémentaires $\vec{F}_i$: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$. Cependant pour un système continu on introduit le vecteur lié générique $(P, \vec{f}(P))$ représentant la densité massique de force qui s'exerce sur le point courant P. Si on associe l'élément de masse dm au point P, l'effort total est la résultante $\vec{F}(S/\Re)$: $\vec{F}(S/\Re) = \int_{P \in S} \vec{f}(P)\, dm$.

1-2 Classification des forces

a- Forces extérieures
Ce sont les forces exercées sur le système S par tout corps étranger à S du milieu extérieur.

b- Forces intérieures
Ce sont les forces d'interaction entre les éléments du même système. L'action de tous les points matériels j d'un système sur un point $i \neq j$ est la somme $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \to i}$.

c- Forces de contact
Ce sont des forces qui résultent du contact entre deux solides. Ces forces ne sont pas fondamentales simples dont on connaît l'expression. Elles dépendent de la nature exacte de l'interaction entre des ensembles de particules, de la position de ces particules au voisinage des surfaces en contact et par conséquent de la structure microscopique des surfaces. Ces forces augmentent le nombre d'inconnues du problème.

1-3 Torseur force
Définition

On appelle torseur force, $\tau_F(S/\Re)$, s'exerçant sur un système S en mouvement dans $\Re$, le torseur ayant pour élément de réduction en O la résultante et le moment des forces :
Système discret

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \quad , \quad \vec{M}_O = \sum_i \vec{OA_i} \wedge \vec{F}_i$$

Système continu

$$\vec{R} = \int_{P\in S} \vec{f}(P)\, dm \quad , \quad \vec{M}_O = \int_{P\in S} \vec{OP} \wedge \vec{f}(P)\, dm$$

Exemple : Torseur poids $\tau_P(S/\Re)$
Soit un solide de masse m de centre de masse G soumis à l'effet de la pesanteur de densité massique de force $\vec{g}$. Le torseur poids correspondant s'écrit en O :

$\tau_P(O,S/\Re) = [\vec{P}(S/\Re)\,;\vec{M}_O(S/\Re)]$ avec

$$\vec{P}(S/\Re) = \int_{P\in S} \vec{g}\, dm(P) \qquad \text{et} \qquad \vec{M}_O = \int_{P\in S} \vec{OP} \wedge \vec{g}\, dm(P)$$

Si $\vec{g}$ est constante alors $\vec{P}(S/\Re) = m\vec{g}$ et $\vec{M}_O = [\int_{P\in S} \vec{OP}\, dm(P)] \wedge \vec{g} = \vec{OG} \wedge m\vec{g}$

2- Enoncé du principe fondamental
Considérons un système S fermé en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\Re$. Soit $\tau_D(S/\Re)$ le torseur dynamique associé à S et $\tau_{F_{ext}}(S/\Re)$ le torseur des forces extérieures qui s'exercent sur S.
Par rapport à tout référentiel galiléen $\Re$ et pour tout système matériel S fermé en mouvement dans $\Re$, le torseur dynamique est égal au torseur des forces extérieures.

$$\tau_D(S/\Re) = \tau_{F_{ext}}(S/\Re)$$

Remarque : Le problème qui se pose au principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) est celui de la détermination des repères galiléens.

On dit que deux référentiels $\Re$ et $\Re$' sont galiléens si $\vec{V}(\Re/\Re') = \vec{cst}$ et $\vec{\omega}(\Re/\Re') = 0$.

3- Théorèmes généraux
Les théorèmes généraux sont des conséquences immédiates du principe fondamental de la dynamique.
3-1 Théorème de la résultante dynamique

La résultante des forces extérieures, $\vec{F}_{ext}(S/\Re)$, agissant sur un système matériel S en mouvement dans un référentiel galiléen est égal à la résultante dynamique $\vec{S}$ du système S dans $\Re$:

$$\vec{F}_{ext}(S/\Re) = \vec{S}$$

En tenant compte du résultat établi en cinétique $\vec{S}(S/\Re) = m\,\vec{\gamma}(G/\Re)$, on a un énoncé équivalent :
La somme des forces extérieures appliquées à un système matériel S quelconque est égale à la résultante dynamique de son centre d'inertie affecté de la masse totale de S.

$$\vec{F}_{ext}(S/\Re) = m\,\vec{\gamma}(G/\Re)$$

3-2 Théorème du moment dynamique
En un point O quelconque d'un système S en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ℜ, le moment dynamique de S est égale au moment des forces extérieures appliquées à S en ce point.

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{ext} \to S) = \vec{\delta}(O,S/\Re)$$

Or on sait que :

$$\vec{\delta}(O,S/\Re) = \frac{d\vec{\sigma}(O,S/\Re)}{dt} + m\,\vec{V}(O/\Re) \wedge \vec{V}(G/\Re)$$

En conséquence si $\vec{V}(O/\Re) = \alpha\,\vec{V}(G/\Re)$, ou $\vec{V}(O/\Re) = 0$, ou $O \equiv G$ on obtient le théorème du moment cinétique :

Si O est un point fixe, ou si sa vitesse $\vec{V}(O/\Re)$ est parallèle à la vitesse du centre d'inertie, $\vec{V}(G/\Re)$, ou au point G lui même, le moment des forces extérieures appliquées au système S est égal à la dérivée du moment cinétique en ce point.

Si $\vec{V}(O/\Re) \,//\, \vec{V}(G/\Re)$ ou $\vec{V}(O/\Re) = 0$,

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{ext} \to S) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(O,S/\Re)}{dt}\right|_{\Re}$$

En particulier si $O \equiv G$ on a la relation très utile

$$\vec{M}_G(\vec{F}_{ext} \to S) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/\Re)}{dt}\right|_{\Re}$$

Elle exprime le théorème du moment cinétique d'un système matériel *S* en mouvement autour de son centre d'inertie :
Le moment en G, centre d'inertie d'un système matériel S quelconque, des forces extérieures appliquées à S est égal à la dérivée du moment cinétique de S dans son mouvement autour de G.

3-3 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire associé à un axe Δ fixe. Si $O \in \Delta$, on a d'après le théorème du moment cinétique :

$$\vec{u} \cdot \vec{M}_O(\vec{F}_{ext} \to S) = \vec{u} \cdot \left.\frac{d\vec{\sigma}(O,S/\Re)}{dt}\right|_{\Re}$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{M}_O(\vec{F}_{ext}\rightarrow S)=\left.\frac{d(\vec{u}\,.\,\vec{\sigma}(O,S/\Re))}{dt}\right|_{\Re}$$

Le moment par rapport à un axe fixe, lié à un repère galiléen, des forces extérieures appliquées à un système matériel S quelconque est égal à la dérivée du moment cinétique de S par rapport à cet axe.

3-4 Théorème de l'action et de la réaction

S_1 et S_2 étant deux systèmes matériels sans partie commune. Le torseur des forces exercées par S_1 sur S_2 et le torseur des forces exercées par S_2 sur S_1 sont opposés.

Soit un système matériel $S=S_1\bigcup S_2$ avec $S_1\bigcap S_2=\varnothing$ et soient les torseurs forces suivants :

$\tau_F(S_1\rightarrow S_2/\Re)=\tau_{F_{1\rightarrow 2}}$: torseur des forces exercées par S_1 sur S_2.

$\tau_F(S_2\rightarrow S_1/\Re)=\tau_{F_{2\rightarrow 1}}$: torseur des forces exercées par S_2 sur S_1.

$\tau_{F_1}(S_1/\Re)$: torseur des forces extérieures exercées sur S_1.

$\tau_{F_2}(S_2/\Re)$: torseur des forces extérieures exercées sur S_2.

Le torseur des forces exercées sur $S_1(S_2)$ est donc :

$$\tau_F(S_1/\Re)=\tau_{F_1}+\tau_{F_{2\rightarrow 1}}\quad,\quad \tau_F(S_2/\Re)=\tau_{F_2}+\tau_{F_{1\rightarrow 2}}$$

En conséquence le torseur des forces appliquées sur S est :

$$\tau_F(S{=}S_1\bigcup S_2/\Re)=\tau_F(S_1)+\tau_F(S_2)$$

Or d'après le P.F.D. on a :

$$\tau_D(S_1/\Re)=\tau_{F_1}+\tau_{F_{2\rightarrow 1}}$$

$$\tau_D(S_2/\Re)=\tau_{F_2}+\tau_{F_{1\rightarrow 2}}\qquad\Rightarrow\qquad \tau_{F_{1\rightarrow 2}}=-\tau_{F_{2\rightarrow 1}}$$

$$\tau_D(S{=}S_1\bigcup S_2/\Re)=\tau_F(S{=}S_1\bigcup S_2/\Re)=\tau_{F_1}+\tau_{F_2}$$

Conséquences

- i- Si S_1 et S_2 se réduisent à des points matériels, on obtient le résultat : $\vec{F}_{1\rightarrow 2}+\vec{F}_{1\rightarrow 2}=0$
- ii- En généralisant cette propriété pour tous les points matériels d'un système S, on déduit que le torseur des forces intérieures est nul : $\tau(\vec{F}_{\text{int}}\rightarrow S)=0$.

3-4 *Cas d'un référentiel non galiléen*

Soit un système matériel S en mouvement par rapport à deux référentiels $\Re_0$ galiléen et $\Re$ d'origine *O'* non galiléen.

$$\forall\ P\in S,\ \vec{\gamma}(P\in S/\Re_0)=\vec{\gamma}(P\in S/\Re)+\vec{\gamma}_e(P\in S/\Re_0)+\vec{\gamma}_c(P\in S/\Re)$$

avec

$$\vec{\gamma}_e(P)=\vec{\gamma}(O'/\Re_0)+\vec{\omega}(\Re/\Re_0)\wedge(\vec{\omega}(\Re/\Re_0)\wedge\vec{O'P})+\left.\frac{d\vec{\omega}(\Re/\Re_0)}{dt}\right|_{\Re_0}\wedge\vec{O'P}$$

$$\vec{\gamma}_c(P)=2\,\vec{\omega}(\Re/\Re_0)\wedge\vec{V}(P/\Re)$$

Or la résultante du torseur dynamique est $m\vec{\gamma}(G/\Re)$:

$$m\vec{\gamma}(G/\Re_0)=m\vec{\gamma}(G/\Re)+\int_{P\in S}\vec{\gamma}_e(P)\,dm+\int_{P\in S}\vec{\gamma}_c(P)\,dm$$

Le moment dynamique étant donné par :

$$\vec{\delta}(O,S/\Re_0)=\int_{P\in S}\vec{OP}\wedge\vec{\gamma}(P/\Re_0)\,dm$$

$$=\int_{P\in S}\vec{OP}\wedge\vec{\gamma}(P/\Re)\,dm+\int_{P\in S}\vec{OP}\wedge\vec{\gamma}_e(P)\,dm+\int_{P\in S}\vec{OP}\wedge\vec{\gamma}_c(P)\,dm$$

Si on note par $\tau_{ie}=[\vec{F}_{ie}\,;\vec{M}_{ie}]$ le torseur d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie}=-\int_{P\in S}\vec{\gamma}_e(P)\,dm \quad , \quad \vec{M}_{ie}(O,S/\Re)=-\int_{P\in S}\vec{OP}\wedge\vec{\gamma}_e(P)\,dm$$

et par $\tau_{ic}=[\vec{F}_{ic}\,;\vec{M}_{ic}]$ le torseur d'inertie de coriolis :

$$\vec{F}_{ic}=-\int_{P\in S}\vec{\gamma}_c(P)\,dm \quad , \quad \vec{M}_{ic}(O,S/\Re)=-\int_{P\in S}\vec{OP}\wedge\vec{\gamma}_c(P)\,dm$$

le principe fondamental de la dynamique ($\tau_D(S/\Re_0)=\tau_{F_{ext}}(S/\Re_0)$) conduit à :

$$\tau_D(S/\Re)=\tau_{F_{ext}}(S/\Re_0)+\tau_{ie}(S/\Re)+\tau_{ic}(S/\Re)$$

Théorème

Le torseur dynamique d'un système matériel S quelconque en mouvement par rapport à un repère $\Re$ quelconque est égal à la somme du torseur des forces extérieures appliquées à S et des torseurs des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis de S.

Cas particuliers

Si $\Re$ est animé d'un mouvement de translation par rapport à $\Re_0$ on a :

$\forall\ P\in S\ \ \vec{\gamma}_c(P)=0$ et $\vec{\gamma}_e(P)=\vec{\gamma}(O'/\Re_0)$. Ainsi, le torseur d'inertie de Coriolis est nul et le torseur d'inertie d'entraînement est un glisseur de résultante $\vec{F}_{ie}=-m\vec{\gamma}(O'/\Re_0)$ et de moment

$$\vec{M}_{ie}(O,S/\Re)=-\int_{P\in S}\vec{OP}\wedge\vec{\gamma}(O'/\Re_0)\,dm=-\vec{OG}\wedge m\vec{\gamma}(O'/\Re_0).$$

Si en plus la translation est uniforme alors $\vec{\gamma}(O'/\Re_0)=0$ et par conséquent $\tau_{ie}=0$ et $\tau_{ic}=0$. $\Re$ est alors galiléen.

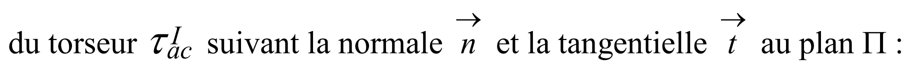
II- Lois de Coulomb sur le frottement solide

Dans le cas des solides en contact, en plus des forces à distance tel que la pesanteur de nouvelles forces dites de contact s'ajoutent. La détermination de ces forces de contact est très complexe car elles dépendent de la structure microscopique des surfaces de contact et de la nature exacte de l'interaction entre les particules au voisinage des surfaces. Bien que les forces de contact diminuent le degré de liberté du système, l'étude du mouvement ezst très complexe du fait du nombre d'inconnu qui est augmenté à cause de ces forces. Cependant afin d'étudier des systèmes en contact un modèle simplifié de ces actions est proposé.

1- Actions de contact

L'action de contact qu'exerce un solide S_2 sur un solide S_1 est décrite par un ensemble de forces qui agissent sur S_1 aux quelles on associe un torseur des actions de contact $\tau_{ac}^{I} = [\vec{R}, \vec{M}_I]$ ou $\vec{R}$ est la résultante et $\vec{M}_I$ son moment dynamique au point I.

Si on introduit le plan tangent Π commun aux deux solides en contact, on peut décomposer les éléments de réduction


du torseur τ_{ac}^{I} suivant la normale $\vec{n}$ et la tangentielle $\vec{t}$ au plan Π :

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t \quad , \quad \vec{M}_I = \vec{M}_{I,n} + \vec{M}_{I,t}$$

R_n est la réaction normale au plan Π alors que $\vec{R}_t$ est la force de frottement ou force de résistance au glissement.

$\vec{M}_{I,n}$ est le moment de résistance au pivotement et $\vec{M}_{I,t}$ est le moment de résistance au roulement au point I.

Si le contact est quasi ponctuel, $\vec{M}_I$ est négligeable car les forces de contact sont ponctuelles.

2- Lois sur le frottement solide : Lois de Coulomb

a- Réaction normale

Puisque la réaction s'oppose à la pénétration d'un solide dans l'autre, alors la réaction normale est une force répulsive dirigée de $S_2 \rightarrow S_1$. Sa norme dépend des conditions du mouvement ou de l'équilibre et des autres actions qui s'exercent sur S_1.

b- Réaction tangentielle

Les lois aux quelles satisfait la réaction tangentielle dépendent de la valeur de la vitesse de glissement $\vec{V}_g$ du solide S_1 sur S_2.

i- $\vec{V}_g = 0$

Si on exerce une force $\vec{F}$ de traction sur un solide S_1 en contact sans glissement avec le solide S_2 de tel sorte que cette force soit située dans le plan Π tangent en I aux surfaces limitant S_1 et S_2, l'expérience montre que le solide reste immobile tant que $\|\vec{F}\|$ n'atteint pas une valeur maximale $\|\vec{R}_{t,m}\|$ tel que :

$$//\vec{R}_{t,m}// = \mu_s // \vec{R}_n//$$

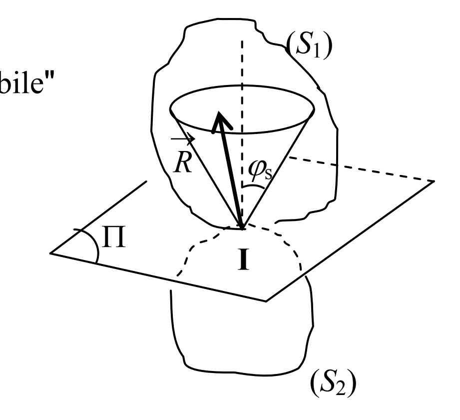
μ_s est une constante appelée facteur d'adhésion statique ou de frottement statique. Expérimentalement on constate que :

1[ére] loi : le facteur de frottement μ_s est indépendant de l'aire de la surface en contact.

2[éme] loi : le facteur μ_s est indépendant de $//\vec{R}_n//$.

Donc dans le cas d'un non glissement "le solide reste immobile"

$$//\vec{R}_t// \le \mu_s // \vec{R}_n//$$



Géométriquement cette inégalité exprime le fait que la réaction $\vec{R}$ est située à l'intérieur d'un cône de révolution d'axe la normale en I au plan Π, de sommet I et de demi angle φ_s ; $\mu_s = \tan\varphi_s$. Ce cône est appelée cône de frottement.

ii- $\vec{V}_g \neq 0$

1[ére] loi : la force de frottement $\vec{R}_t$ qu'exerce S_2 sur S_1 a le même support que la vitesse de glissement $\vec{V}_g$: $\vec{V}_g \wedge \vec{R}_t = 0$.

2[éme] loi : $\vec{R}_t$ a un sens opposé à celui de $\vec{V}_g$: $\vec{V}_g \cdot \vec{R}_t < 0$.

3[éme] loi : Pour une vitesse de glissement fixée, $//\vec{R}_t// \propto //\vec{R}_n//$:

$$//\vec{R}_t// = \mu // \vec{R}_n//$$

ou μ est le coefficient de frottement dynamique. On définit aussi l'angle de frottement dynamique par tang $\varphi = \mu$.

4[éme] loi : μ est indépendant de la vitesse de glissement et est inférieur au coefficient de frottement statique : $\mu < \mu_s$.

En posant $\vec{\omega}(S_1/S_2) = \vec{\omega}_n(S_1/S_2) + \vec{\omega}_t(S_1/S_2)$, ces lois de Coulomb peuvent se généraliser au frottement de roulement et de pivotement comme suit :

c- Moment de résistance au roulement $\vec{M}_{I,t}$

i- S'il n'y a pas de roulement, alors $\vec{\omega}_t(S_1/S_2) = 0$ et $//\vec{M}_{I,t}// < h // \vec{R}_n//$ ou h est le coefficient de frottement de roulement.

ii- Si $\vec{\omega}_t(S_1/S_2) \neq 0$, S_1 roule sur S_2.

- Le moment de résistance au roulement $\vec{M}_{I,t}$ a le même support que la vitesse angulaire de roulement $\vec{\omega}_t(S_1/S_2) \neq 0$: $\vec{M}_{I,t} = \lambda\, \vec{\omega}_t(S_1/S_2)$.

- $\vec{M}_{I,t}$ et $\vec{\omega}_t(S_1/S_2)$ sont de sens opposés : $\vec{\omega}_t(S_1/S_2) \cdot \vec{M}_{I,t} < 0$ ($\lambda < 0$).

- Pour une vitesse $\vec{\omega}_t(S_1/S_2)$ fixée : $//\vec{M}_{I,t}// = h\,//\vec{R}_n//$.

d- Moment de résistance au pivotement

i- S'il n'y a pas de pivotement, alors $\vec{\omega}_n(S_1/S_2) = 0$ et $//\vec{M}_{I,n}// < k\,//\vec{R}_n//$ ou k est le coefficient de frottement de pivotement.

ii- Si $\vec{\omega}_n(S_1/S_2) \neq 0$, S_1 pivote autour de S_2.

- Le moment de résistance au pivotement $\vec{M}_{I,n}$ a le même support que la vitesse angulaire de pivotement $\vec{\omega}_n(S_1/S_2) \neq 0$: $\vec{M}_{I,n} = \lambda'\,\vec{\omega}_n(S_1/S_2)$.

- $\vec{M}_{I,n}$ et $\vec{\omega}_n(S_1/S_2)$ sont de sens opposés : $\vec{\omega}_n(S_1/S_2)\cdot\vec{M}_{I,n} < 0$ ($\lambda' < 0$).

iii- Pour une vitesse $\vec{\omega}_n(S_1/S_2)$ fixée : $//\vec{M}_{I,t}// = k\,//\vec{R}_n//$.

III- Applications

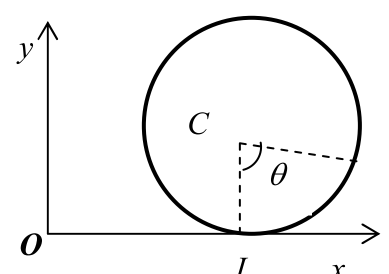
1- Disque vertical en mouvement sur un axe horizontal

Soit un disque D de masse m, de rayon r et de centre d'inertie C posé verticalement sur l'axe horizontal Ox de $\Re$ avec initialement une vitesse angulaire $\overset{\circ}{\theta} = -\omega_0\,\vec{z}$ et une vitesse de son centre de masse C, $\vec{V}_0 = V_0\,\vec{x}$.

Les forces extérieures sont : le poids $\vec{P} = -mg\,\vec{y}$ et la réaction $\vec{R} = R_t\,\vec{x} + R_n\,\vec{y}$.

D'après les théorèmes généraux on a :

$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{\gamma}(C/\Re)$, $\vec{\delta}(C,D/\Re) = \vec{CI} \wedge \vec{R} + \vec{M}_I$



Or $\vec{\delta}(C,D/\Re) = \dfrac{d\vec{\sigma}(C,D/\Re)}{dt}$, avec

$\vec{\sigma}(C,D/\Re) = \Im(C,D)\,\vec{\omega}(D/\Re)$.

$$\vec{\sigma}(C,D/\Re) = \frac{mr^2}{4}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\overset{\circ}{\theta}\end{pmatrix} \text{ ; on obtient alors } \vec{\delta}(C,D/\Re) = \frac{mr^2}{2}\overset{\circ\circ}{\theta}\,\vec{z}.$$

Par projection sur les axes on obtient, en supposant que le contact est ponctuel ($//\vec{M}_I// <<$) :

$$m\overset{\circ\circ}{x} = R_t \quad ; \quad R_n = mg \quad ; \quad \frac{mr^2}{2}\overset{\circ\circ}{\theta} = rR_t$$

La 1ére et la 3éme équation contiennent les trois inconnus x, θ, R_t. Par conséquent la prise en compte des lois de Coulomb sur le frottement est indispensable.

Cependant on se propose d'étudier le comportement de la vitesse du glissement $\vec{V}_g$.

$$\vec{V}_g = \vec{V}(I \in D/\Re) - \vec{V}(I \in Ox/\Re) = \vec{V}(I \in D/\Re)$$

$$\vec{V}_g = \vec{V}(C/\Re) + \vec{IC} \wedge \vec{\omega}(D/\Re)$$

$$\vec{V}_g = (\dot{x} + r\dot{\theta})\,\vec{x}$$

$$\frac{d\vec{V}_g}{dt} = (\ddot{x} + r\ddot{\theta})\,\vec{x} = \frac{3R_t}{m}\vec{x} = \frac{3}{m}\vec{R}_t$$

$$\vec{V}_g \cdot \frac{d\vec{V}_g}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{V}_g^{\,2}}{2}\right) = \frac{3}{m}\vec{R}_t \cdot \vec{V}_g < 0 .$$

Puisque $\vec{R}_t$ et $\vec{V}_g$ sont opposés, $\|\vec{V}_g\|$ ne peut que diminuer. Il en résulte que le mouvement se terminera par une phase sans glissement.

2- Roue motrice

Considérons une roue se déplaçant sur un plan incliné. Les actions qui s'exercent sur la roue de centre de masse C, sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ exercée par le sol et le couple moteur $\vec{M}_c = -M_m \vec{z}$ ($M_m > 0$).

En appliquant les théorèmes généraux on obtient :

$$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{\gamma}(C/\Re)$$

$$\vec{\delta}(C/\Re) = \frac{d\vec{\sigma}(C/\Re)}{dt} = \vec{M}_I + \vec{CI} \wedge \vec{R} + \vec{M}_c$$

y
C.
$\vec{\omega}$
x
I
α

ou $\vec{M}_I$ est le moment de l'action au point *I*.

On suppose que la roue roule sans glisser à la vitesse constante.

Les équations dynamiques deviennent, vue que $\dot{\theta} = cste$ (condition de roulement sans glissement),

$$-mg\sin\alpha + R_t = 0 \quad ; \quad -mg\cos\alpha + R_n = 0 \quad ; \quad M_{I,z} + rR_t - M_m = 0$$

Pour que la condition de roulement sans glissement soit satisfaite, il faut que :

$\|\vec{R}_t\| \leq \mu_s \|\vec{R}_n\|$ soit $\dfrac{|M_m - M_{I,z}|}{r} \leq \mu_s mg\cos\alpha$. Puisque le contact est ponctuel $M_{I,z} << M_m$,

$$\frac{M_m}{r} \leq \mu_s mg\cos\alpha .$$

Par conséquent, la montée n'est possible que si :

i- le coefficient de frottement statique ms est suffisamment grand.

Dans le contact caoutchou-bitume μ_s = 0,6 alors que pour le contact acier-acier μ_s = 0,2. Ce ci explique la relative facilité qu' a un camion avec remorque de franchir une rampe inclinée alors que pour un train le contact acier-acier est un handicape pour obtenir une grande force de traction, alors qu'il est énergitiquement avantageux.

ii- La masse *m* des roues motrices est suffisamment grande.

C’est ce qui est réalisé dans les trains de montagne qui sont équipés de deux locomotives, non pas pour aller plus vite mais pour augmenter la masse des roues motrices.
iii- Le couple moteur n’est pas trop grand.

ChapV
Travail, Puissance :
Théorème de l’énergie cinétique

L'étude énergétique des systèmes matériels nécessite la connaissance du travail des forces appliquées et leurs puissances. Ainsi on peut établir une relation entre l'énergie cinétique du système et l'ensemble des travaux des forces appliquées. Cette étude nous conduit à partir des expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique dans de nombreux cas à une équation dite intégrale première.

I- Travail et puissance des forces s'exerçant sur un système matériel

1- Définition de la puissance et du travail

1-1 Cas d'un point matériel

Soit une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M de vitesse $\vec{V}(M)$. La puissance, dans le référentiel $\Re$, de $\vec{F}$ est la fonction $\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{V}(M)$.

Cette définition n'a de sens que si on indique le point matériel auquel est appliquée la force $\vec{F}$ et le référentiel $\Re$ par rapport auquel on défini la vitesse $\vec{V}(M)$.

Le travail élémentaire dans $\Re$ entre les instants t et $t + dt$ est : $\delta W = \mathcal{P}(t)\, dt$.

$$\delta W = \vec{F}.\vec{V}(M)\, dt = F\, //d\vec{OM}//\, \cos(\vec{F},\vec{V}(M))$$

Si $\vec{F}(t) = \vec{F}$, le travail entre les instants t_0 et t_1 est donc

$$W(t_0 , t_1) = F\, d \cos(\vec{F},\vec{V}(M))$$

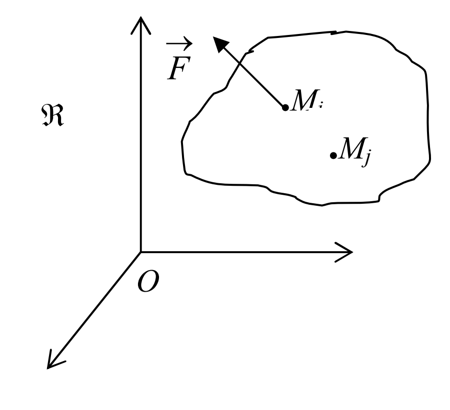
où d est la distance parcourue par le point M matériel entre les deux instants t_0 et t_1.

Si $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

$$\delta W = \vec{F}.\vec{V}(M)\, dt = -\vec{\nabla} E_p.d\vec{OM} = \text{-}dE_p \text{ et par conséquent } \mathcal{P} = \frac{\delta W}{\delta t} = -\frac{dE_p}{dt}.$$

En général le travail accompli entre les instants t_0 et t_1 est :

$$W(t_0 , t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(t)\, dt$$



2-1 Cas d'un système matériel

Considérons un système de points matériels M_i, chacun a une vitesse $\vec{V}(M_i)$ par rapport à un référentiel $\Re$, sur lequel s'exercent les forces $\{M_i , \vec{F}_i\}$. La puissance des forces considérées relativement à $\Re$ s'écrit : $\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i .\vec{V}(M_i)$

Dans le cas d'un système de distribution continue tel que les forces sont réparties en densité de force $\vec{f}(M)$ la puissance s'écrit : $\mathcal{P} = \int_{M \in S} \vec{f}(M).\vec{V}(M)\, dm$

La force appliquée en chaque point M_i est la somme des forces appliquées par un élément extérieur à S et des forces intérieures exercées par tut autre point $M_{j\neq i}$ de S :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

d'où $\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} . \vec{V}(M_i) + \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} . \vec{V}(M_i)$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{in}$$

Donc la puissance totale est la somme de puissance des forces intérieures à S, et de la puissance des forces extérieures à S. Le travail élémentaire pendant l'interval de temps dt est :

$$\delta W = \mathcal{P}(t)\, dt = \mathcal{P}_{ext}(t)\, dt + \mathcal{P}_{\text{int}}(t)\, dt = \delta W_{ext} + \delta W_{\text{int}}$$

avec

$$\delta W_{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} . d\vec{OM}_i \quad , \quad \delta W_{\text{int}} = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} . d\vec{OM}_i$$

2- Travail des forces intérieures

Considérons un système en mouvement par rapport aux deux référentiels $\Re$ et $\Re'$ qui sont en mouvement quelconque l'un par rapport à l'autre.

La puissance totale des forces intérieures par rapport à $\Re$ et $\Re'$ est :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} . \vec{V}(M_i) \quad , \quad \mathcal{P}'_{\text{int}} = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} . \vec{V}'(M_i)$$

$$\mathcal{P}_{\text{int}} - \mathcal{P}'_{\text{int}} = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} . \left(\vec{V}(M_i) - \vec{V}'(M_i)\right)$$

or d'après la loi de composition des vitesses : $\vec{V}(M_i) = \vec{V}(O') + \vec{V}'(M_i) + \vec{\omega}(\Re/\Re') \wedge \vec{O'M}_i$

on obtient $\mathcal{P}_{\text{int}} - \mathcal{P}'_{\text{int}} = \vec{V}(O') . \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} + \vec{\omega}(\Re/\Re') . \sum_{i,j} (\vec{O'M}_i \wedge \vec{F}_{ij})$.

Comme le torseur des forces intérieures est nul : $\vec{S} = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = 0$, $\vec{M}_{O'}^{\text{int}} = \sum_{i,j} \vec{O'M}_i \wedge \vec{F}_{ij} = 0$

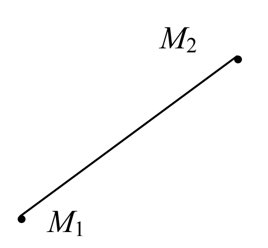
Alors

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}'_{\text{int}} \quad , \quad \delta W_{\text{int}} = \delta W'_{\text{int}}$$

La puissance et le travail des forces intérieures d'un système sont indépendants du référentiel par rapport auquel on les calcule. En conséquence la puissance des forces intérieures doit être évaluée dans le référentiel où elle est le plus simple à calculer.

Remarquons que le travail des forces intérieures n'est en général pas nul. Dans de nombreux cas, le travail peut se mettre sous la forme de la différentielle d'une fonction : $\delta W_{\text{int}} = -dE_p^{\text{int}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N)$, où E_p^{int} est l'énergie potentielle associée aux forces intérieures.

Considérons le cas particulier de deux particules en interaction.



$$\delta W_{21} = \vec{F}_{21} . d\vec{M}_1 \quad , \quad \delta W_{12} = \vec{F}_{12} . d\vec{M}_2$$

$$\delta W_{\text{int}} = \vec{F}_{21} . (d\vec{M}_1 - d\vec{M}_2) = \vec{F}_{21} . d\vec{M}_{21} = \vec{F}_{12} . d\vec{M}_{12}$$

Comme $\vec{F}_{12}$ est portée par $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, $\delta W_{\text{int}} = F_{12}\, dr$.

Si $\vec{F}_{12} = \frac{A}{r^2}\vec{e}_r$ (force gravitationnelle ou électrique)

$\delta W_{\text{int}} = \frac{A}{r^2}\, dr = -d(\frac{A}{r}) \Rightarrow E_p^{\text{int}} = \frac{A}{r} + cste$.

Dans le cas d'un solide(système composé d'un ensemble de points rigides) le travail, et en conséquent la puissance, des forces intérieures est nul car $d\overrightarrow{M_1 M_2} = 0$.

3- Travail des forces extérieures : Energies potentielles associées

$$\delta W_{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}.\vec{V}(M_i)\, dt$$

Dans le cas d'un solide le champ de vitesse est un champ antisymétrique : $\vec{V}(M_i) = \vec{V}(A) + \vec{\omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AM_i}$

$$\delta W_{ext} = (\vec{V}(A).\sum_i \vec{F}_i^{ext})\, dt + \vec{\omega}(S/\Re).\sum_i (\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_i^{ext})\, dt$$

$$\delta W_{ext} = \vec{F}^{ext}.\vec{V}(A)\, dt + \vec{M}_{F^{ext}}(A).\vec{\omega}(S/\Re)\, dt$$

$$\mathcal{P}_{ext} = \vec{F}^{ext}.\vec{V}(A) + \vec{M}_{F^{ext}}(A).\vec{\omega}(S/\Re)$$

La puissance extérieure d'un solide S est le comoment du torseur force τ_F et du torseur cinétique τ_v.

$$\mathcal{P}_{ext} = [\,\tau_v\,,\,\tau_F] = [\vec{\omega}(S/\Re), \vec{V}(A)][\vec{F}^{ext}, \vec{M}_{F^{ext}}(A)]$$

$$\mathcal{P}_{ext} = \vec{F}^{ext}.\vec{V}(A) + \vec{M}_{F^{ext}}(A).\vec{\omega}(S/\Re)$$

Exemples

1- Travail des forces de pesanteur : Energie potentielle

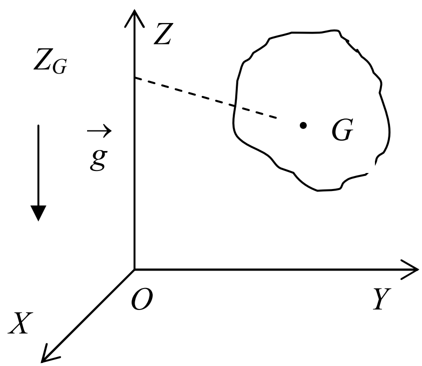
Le travail élémentaire des forces de pesanteur qui s'exercent sur un système matériel S est :

$$\delta W_{ext} = \sum_i m_i\, \vec{g}.d\overrightarrow{OM_i} = \vec{g}.\sum_i m_i\, d\overrightarrow{OM_i}$$

$$\delta W_{ext} = \sum_i m_i\, \vec{g}.d\overrightarrow{OM_i} = \vec{g}.md\overrightarrow{OG} = -d(m\vec{g}.\overrightarrow{OG})$$

$$E_p = mgZ_G + cste$$

$$W_{ext} = -mg\,(Z_{G_2} - Z_{G_1})$$



où Z_{G_1} et Z_{G_2} sont les positions du centre d'inertie à des instants différents.

2- Travail des forces d'inertie d'entraînement

2-1 Cas de translation

Soit un référentiel $\Re$' en mouvement de translation par rapport à un référentiel $\Re$.

$$\delta W_{ext} = -\sum m_i \vec{\gamma}_{ie}.d\vec{O'M}_i = -\vec{\gamma}_{ie}.\sum m_i \, d\vec{O'M}_i = -m\vec{\gamma}_{ie}.d\vec{O'G}$$

$$E_p = m\vec{\gamma}_{ie}.\vec{O'G} + cste$$

2-2 *Cas de rotation uniforme*

Considérons un système matériel en rotation uniforme $\vec{\omega}$ autour d'un axe fixe par rapport à un repère $\Re$. Chaque élément de masse m_i est soumis à une force centrifuge $\vec{F}_{ie} = m_i\,\omega^2 \vec{H_i M_i}$.

$$\delta W_{ext} = \sum m_i\,\omega^2 \vec{H_i M_i}\,.d\vec{OM}_i$$

or $d\vec{OM}_i = d\vec{OH}_i + d\vec{H_i M_i}$

$$\delta W_{ext} = \sum m_i \frac{\omega^2}{2} d(\vec{H_i M_i})^2 = \frac{\omega^2}{2} dI_{Oz}$$

$$E_p = -\frac{\omega^2}{2} I_{Oz} + cste$$

où I_{oz} est le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz.

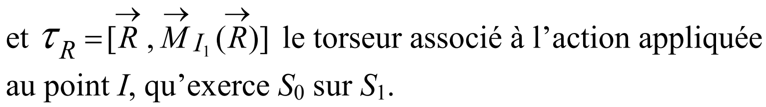


4- Travail total des actions de contact entre solides

1-4 Travail de l'action d'un solide fixe sur un solide en mouvement

Considérons un solide S_0 fixe qui exerce une force via un contact ponctuel en I avec un solide S_1 en mouvement.

Soit $\vec{V}_{I_1}$ la vitesse du point I_1 de S_1 qui coïncide avec I

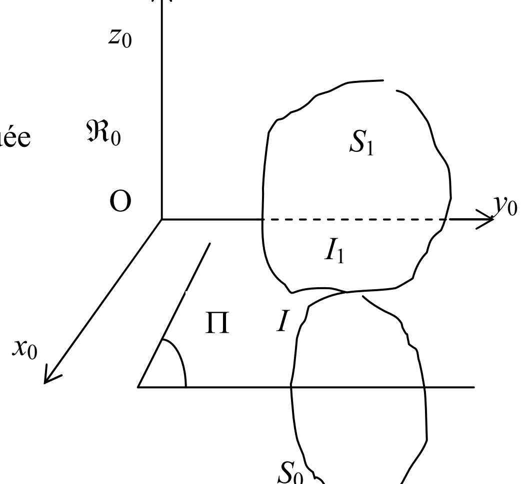


et $\tau_R = [\vec{R}\,, \vec{M}_{I_1}(\vec{R})]$ le torseur associé à l'action appliquée au point I, qu'exerce S_0 sur S_1.

Le travail élémentaire de cette force de contact est :

$$\delta W_{ext} = \vec{R}.\vec{V}_{I_1}\,dt + \vec{M}_{I_1}(\vec{R}).\vec{\omega}(S_1/S_0)\,dt$$

$$\mathcal{P} = \vec{R}.\vec{V}_{I_1} + \vec{M}_{I_1}(\vec{R}).\vec{\omega}(S_1/S_0)\,.$$



Comme le contact est ponctuel $\vec{M}_{I_1}(\vec{R}) = 0$ et en conséquence $\mathcal{P} = \vec{R}.\vec{V}_{I_1}$.

$\mathcal{P} = 0$ dans deux cas :

* $\vec{R} \perp \vec{V}_{I_1}$. Sachant que $\vec{V}_{I_1}$ est contenue dans le plan tangent Π, alors les forces de frottement sont nulles.

* $\vec{V}_{I_1} = 0$. Il n'y a pas de glissement.

2-4 Puissance totale des actions en contact

Considérons deux solides S_1 et S_2 en mouvement par rapport à $\Re$ et assujettis à rester en contact pseudo-ponctuel, moment des actions de contacts n'est pas négligeable. Notons par I l'un des points géométriques de contact I_1 et I_2 les points respectifs de S_1 et S_2 qui coïncident avec I à l'instant considéré.

Si $\tau_R = [\vec{R}_{2\to 1}, \vec{M}_I(\vec{R})]$ est le torseur associé aux actions de contact qu'exerce S_2 sur S_1, le travail élémentaire est :

$$\delta W_{2\to 1} = [\vec{R}_{2\to 1}.\vec{V}_{I_1} + \vec{M}_{I_1}(\vec{R}_{2\to 1}).\vec{\omega}(S_1/\Re)]\,dt$$

$$\delta W_{1\to 2} = [-\vec{R}_{2\to 1}.\vec{V}_{I_2} - \vec{M}_{I_2}(\vec{R}_{2\to 1}).\vec{\omega}(S_2/\Re)]\,dt$$

d'où l'expression du travail total

$$\delta W_t = [\vec{R}_{2\to 1}.\vec{V}_g + \vec{M}_I(\vec{R}_{2\to 1}).\vec{\omega}(S_1/S_2)]\,dt$$

En conséquence

$$\mathcal{P}_t = \vec{R}_{2\to 1}.\vec{V}_g + \vec{M}_I(\vec{R}_{2\to 1}).\vec{\omega}(S_1/S_2)$$

Dans le cas où $\vec{R}_{2\to 1}.\vec{V}_g \neq 0$ le terme $\vec{M}_I.\vec{\omega}(S_1/S_2)$ peut être négligeable vue qu'on assimile le contact à un contact ponctuel.

Comme la vitesse de glissement $\vec{V}_g$ est portée par le plan tangent en I, la puissance totale des actions de contact se réduit à :

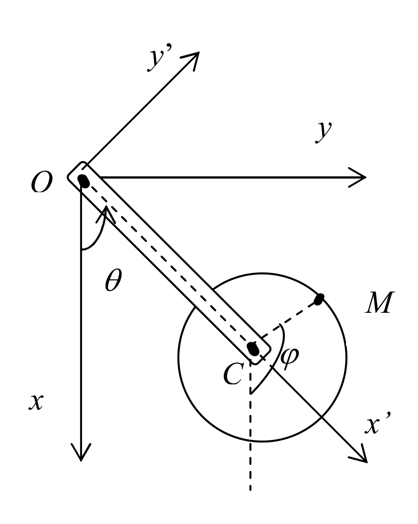
$$\mathcal{P}_t = \vec{T}_{2\to 1}.\vec{V}_g$$

D'autre part, en raison des lois de Coulomb sur le frottement : la composante tangentielle de $\vec{R}$, i .e $\vec{T}_{1\to 2}$, est opposée à $\vec{V}_g$, $\mathcal{P}_t \leq 0$.

$\mathcal{P}_t = 0$ si $\vec{V}_g = 0$ (pas de glissement) ou $\vec{T}_{1\to 2} = 0$ (pas de frottement).

Rappelons que $\mathcal{P}_t$ est indépendante du choix du référentiel par rapport auquel on la calcule puisque le torseur force correspondant est nul. Il est donc judicieux de l'évaluer dans le référentiel où les calculs sont les plus simples.

Exemple



Considérons le système constitué par une tige **T** et un disque **D** articulé au centre C de **D**. L'autre extrémité O est fixe dans $\Re$. Les actions de contact interviennent au point O et au point C.
Au point O la puissance totale est :

$$\wp_t = \vec{R}.\vec{V}(O/\Re) + \vec{M}_O(\vec{R}).\vec{\omega}(T/\Re) = \vec{M}_O(\vec{R}).\overset{\circ}{\theta}\vec{e}_z$$

Au point C, le calcul est simple dans $\Re'$ car $\vec{V}(C/\Re') = 0$.

$$\wp_t = \vec{M}_C(\vec{R}).\vec{\omega}(D/\Re') = \vec{M}_C(\vec{R}).(\overset{\circ}{\varphi} - \overset{\circ}{\theta})\vec{e}_z$$

3-3 Application aux liaisons : Liaisons parfaites
Une liaison est parfaite si la puissance totale des actions de contact est nulle. Comme cette puissance est indépendante du référentiel considéré, le caractère parfait d'une liaison est une propriété intrinsèque.
Dans le cas de l'exemple de la masselotte qui glisse sur une tige en rotation uniforme :

$\wp_t = F_t \overset{\circ}{x}'$. $\wp_t = 0 \Rightarrow F_t = 0$; pas de frottement.

Dans le cas de la sphère roulant sans glisser sur un plan incliné : $\wp_t = \vec{R}.\vec{V}_g$. $\wp_t = 0 \Rightarrow$ $\vec{V}_g = 0$; pas de glissement.

II- Théorèmes de l'énergie

1- Théorème de l'énergie cinétique

1-1 Cas d'un point matériel

Considérons un point matériel M de masse m soumis à un ensemble de forces extérieures $\vec{F}$ et en mouvement par rapport à un référentiel $\Re$ galiléen.

La puissance de $\vec{F}$ est : $\wp = \vec{F}.\vec{V} = m\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V} = \frac{d}{dt}(1/2mV^2)$

$$\wp = \frac{dT}{dt}$$

La puissance totale est égale à la variation de l'énergie cinématique par rapport au temps. Si $\Re$ n'est pas galiléen, on doit ajouter la puissance de la force d'inertie d'entraînement. La puissance de la force d'inertie de Coriolis est nulle car $\vec{V}.(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = 0$.
Par intégration il vient :

$$\Delta W_{t_1}^{t_2} = \Delta T = T_2 - T_1$$

.La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel M, par rapport à un référentiel $\Re$, est égale au travail des forces extérieures appliquées sur ce point.

1-2 Cas d'un système de points matériel
Par application du théorème de l'énergie cinétique pour chaque point matériel A_i on obtient :

$\mathcal{P}(A_i) = \dfrac{dT(A_i)}{dt}$.

Or $\mathcal{P}_t(A_i) = \mathcal{P}_t^{ext} + \sum_j \mathcal{P}_{ij}$, où $\mathcal{P}_{ij}$ est la puissance qui résulte de la force qu'exerce tout autre point A_j du système sur le point A_i. Si on somme sur tous les points A_i on obtient :

$$\sum_i \frac{dT(A_i)}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i^{ext} + \sum_{ij} \mathcal{P}_{ij} .$$

Vue que $T = \sum_i T(A_i)$, le théorème de l'énergie cinétique pour un système matériel quelconque est :

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{\text{int}}$$

qui par intégration se met sous la forme :

$$\Delta T = W^{ext} + W^{\text{int}}$$

La variation de l'énergie cinétique, par rapport au temps, d'un système matériel quelconque est égale à la somme des puissances extérieures et intérieures.
Remarque : Comme pour le cas du point matériel, dans le cas d'un référentiel non galiléen il faut tenir compte de la puissance de la force d'inertie d'entraînement, celle de Coriolis est nulle.

1-3 Cas d'un solide

Comme la puissance des forces intérieures est indépendante du référentiel par rapport auquel on fait les calculs alors $\mathcal{P}_{\text{int}/\Re} = \mathcal{P}_{\text{int}/\Re_S}$. Or dans le référentiel lié au solide $\Re_S$, $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$. En conséquence le théorème de l'énergie cinétique pour un solide s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}^{ext} .$$

Remarque : Ce résultat peut être obtenu autrement. En effet, la puissance des efforts totaux exercés sur un solide S est :

$$\mathcal{P}^{ext} = \tau_{F_{ext}} . \tau_V = \vec{F}_{ext}.\vec{V}_A + \vec{M}(\vec{F}_{ext}).\vec{\omega}(S/\Re)$$

$$= \int_{P\in S} \vec{\gamma}(P).\vec{V}_A dm + \vec{\omega}(S/\Re). \int_{P\in S} (\vec{AP} \wedge \vec{\gamma}(P))\, dm$$

$$= \int_{P\in S} \vec{\gamma}(P).(\vec{V}_P + \vec{\omega}(S/\Re) \wedge \vec{PA})\, dm + \vec{\omega}(S/\Re). \int_{P\in S} (\vec{AP} \wedge \vec{\gamma}(P))\, dm$$

$$= \int_{P\in S} \vec{\gamma}(P).\vec{V}_P\, dm + \vec{\omega}(S/\Re).\Big[\int_{P\in S} (\vec{PA} \wedge \vec{\gamma}(P))\, dm + \int_{P\in S} (\vec{AP} \wedge \vec{\gamma}(P))\, dm \Big]$$

$$\mathcal{P}^{ext} = \int_{P\in S} \vec{\gamma}(P).\vec{V}(P) dm = \int_{P\in S} \frac{d\vec{V}(P)}{dt}.\vec{V}(P)\, dm$$

$$\mathcal{P}^{ext} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \int_{P\in S} \vec{V}^2(P)\, dm \right)$$

d’où le résultat.

2- Théorème de l’énergie mécanique

Considérons un système soumis à un ensemble de forces extérieures. On distingue les forces qui dérivent d’une énergie potentielle des autres ; la puissance de ces forces extérieures ou intérieures dites conservatives dérive d’une énergie potentielle E_p et s’écrit respectivement $\mathcal{P}_c^{ext} = -\frac{dE_p^{ext}}{dt}$, $\mathcal{P}_c^{\text{int}} = -\frac{dE_p^{\text{int}}}{dt}$.

Si on note par $\mathcal{P}_{nc}^{ext}$ et $\mathcal{P}_{nc}^{\text{int}}$ les puissances des autres forces non conservatives estérieures et intérieures, le théorème de l’énergie cinétique devient :

$\frac{d}{dt}(T + E_p^{ext} + E_p^{\text{int}}) = \mathcal{P}_{nc}^{ext} + \mathcal{P}_{nc}^{\text{int}}$.

Si on définit l’énergie mécanique par :

$$E_m = T + E_p$$

On obtient le théorème de l’énergie mécanique

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{ext}^{nc} + \mathcal{P}_{\text{int}}^{nc}$$

qui peut s’écrire sous la forme intégrale :

$$\Delta E_m = W_{nc}^{ext} + W_{nc}^{\text{int}}.$$

Dans le cas d’un seul solide $\mathcal{P}^{\text{int}} = 0$ (les forces intérieures ne travaillent pas)

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}^{ext} \quad , \qquad \Delta E_m = W_{nc}^{ext}$$

Remarque

Dans le cas où on a plusieurs solides en contact, la puissance interne se réduit à celle des actions entre les solides qui le composent. Alors cette puissance s’annule dans le cas où il n’y a pas de frottement ou de glissement.

III- Lois de conservation et intégrales premières

D’une manière générale, les équations de mouvement sont des équations différentielles du 2ème ordre qu’on doit intégrer. Par fois une telle intégration est possible et conduit à des équations qui expriment des relations entre les paramètres de positions q(t) et leurs dérivées 1ère $\overset{\circ}{q}(t)$ via une équation de type $\varphi(q , \overset{\circ}{q}) = 0$. De telles relations s’appellent des intégrales premières. Ces intégrales 1ère peuvent être obtenues à partir de certaines lois de conservation sans avoir besoin d’intégrer.

1- Conservation de l’énergie

Soit un système de solides dont le mouvement est repéré dans un repère galiléen $\Re$. Si l’ensemble des forces exercées sur le système dérive d’un potentiel (système conservatif) alors le théorème de l’énergie mécanique, vue que $\mathcal{P}_{nc}^{ext} = \mathcal{P}_{nc}^{\text{int}} = 0$ donne $\frac{dE_m}{dt} = 0$. Ce qui conduit à :

$$E_m = T + E_p = Cst$$

Cette équation qui introduit la conservation de l’énergie mécanique du système s’appelle intégrale première de l’énergie.

2- Intégrale première du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique appliqué à un système matériel en un point O fixe d'un repère galiléen $\Re$, s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}(O,S/\Re)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$$

où $\vec{\sigma}(O,S/\Re)$ est le moment cinétique de $S/\Re$ en O et $\vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$ est le moment au point O des forces extérieures appliquées à S. S'il existe un axe galiléen fixe de direction unitaire $\vec{u}$ tel que $\vec{u} \perp \vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$ on obtient alors $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{\sigma}(O,S/\Re)}{dt} = 0$. Ce qui donne la première intégrale du moment cinétique :

$$\vec{u} \cdot \vec{\sigma}(O,S/\Re) = \text{cst}$$